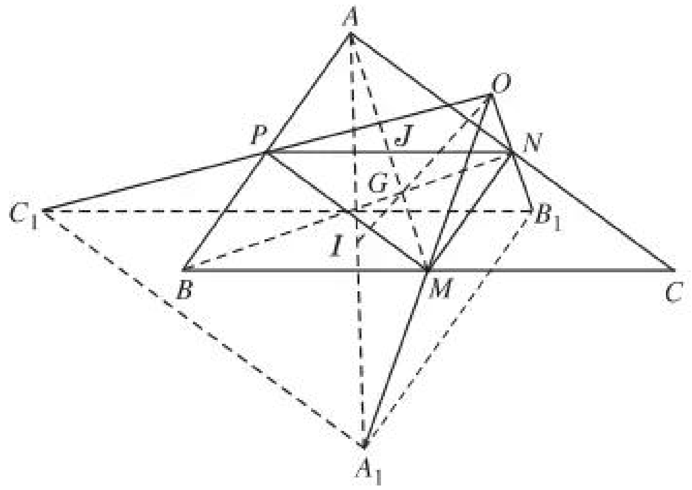
LỜI GIẢI BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. (h.142) a) Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM.

Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AN}}$ biến tam giác APN thành tam giác NMC.

Phép đối xứng tâm $Đ_J$, với J là trung điểm của PN, biến tam giác APN thành tam giác MNP.



Hình 142

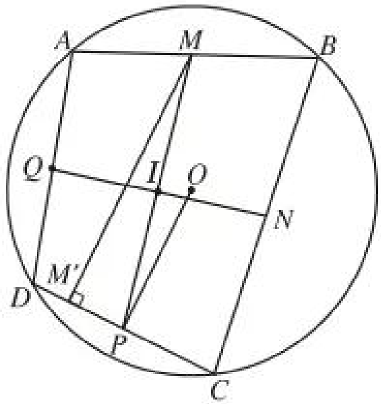
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

c) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác APN, PBM, NMC. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM nên biến H_1 thành

H_2, tức là $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AP}$ hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$. Tương tự ta có $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{AN}$ hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{NH_3}$. Vậy $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$. Từ đó suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AH_1}$ biến tam giác APN thành tam giác $H_1H_2H_3$.

Đối với các trường hợp khác (trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp), chứng minh hoàn toàn tương tự.

2. (h.143)



Hình 143

a) Chú ý rằng vì $MNPQ$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MP và NQ.

Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng MM' thành đường thẳng đi qua P và song song với MM', tức là vuông góc với DC. Vậy đường thẳng MM' được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự : đường thẳng NN' biến thành đường thẳng QO, đường thẳng PP' biến thành đường thẳng MO, đường thẳng QQ' biến thành đường thẳng NO.

b) Vì bốn đường thẳng MO, NO, PO, QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại điểm O' đối xứng với điểm O qua điểm I.

3. (h.144)

a) Ta có

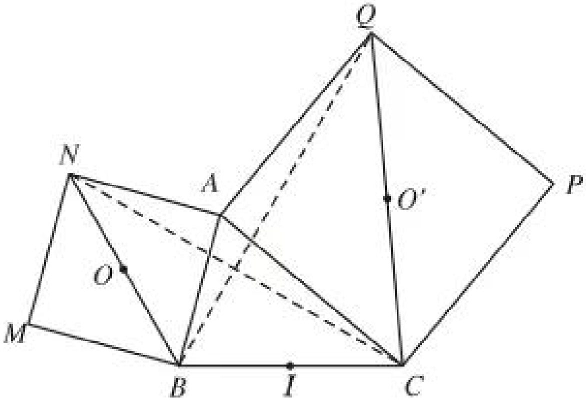
$$AB = AN,\ AQ = AC \text{ và góc } (AB, AN) = (AQ, AC) = -90^\circ.$$

Vậy phép quay tâm A, góc quay $\varphi = -90^\circ$ biến tam giác ABQ thành tam giác ANC.

b) Vì đoạn thẳng BQ biến thành đoạn thẳng NC nên $BQ = NC$ và $BQ \perp NC$ (xem nhận xét sau bài tập 12, chương I, SGV)

c) Theo kí hiệu trên hình 144 thì

$OI \parallel NC$, $OI = \dfrac{1}{2}NC$;



Hình 144

$$O'I \parallel QB,\ O'I = \frac{1}{2}QB.$$

Vậy từ câu b) ta suy ra tam giác IOO' vuông cân tại đỉnh I.

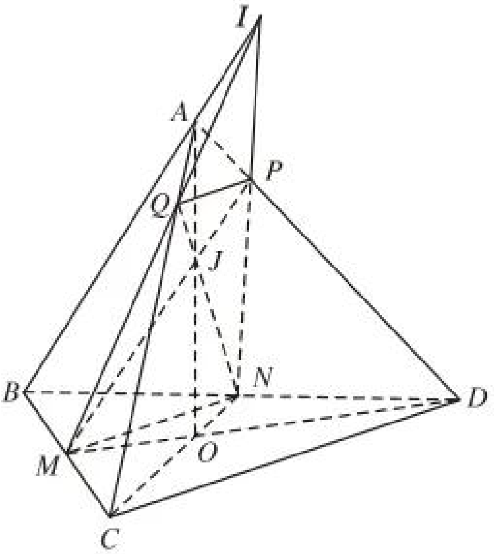
4. (h.145)

a) Kẻ đường thẳng qua P song song với CD cắt AC tại Q thì Q là giao điểm của AC và mp(MNP). Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình thang ($PQ \parallel MN$).

Chú ý. Nếu $P \equiv A$ thì $Q \equiv A \equiv P$; nếu $P \equiv D$ thì $Q \equiv C$.

b) *Thuận.* Giả sử I là giao điểm của QM và PN. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng (ABC), (ABD), ($MNPQ$) thì điểm I thuộc đường thẳng AB.

Vì P thay đổi trên đoạn thẳng AD nên dễ thấy I chỉ nằm trên phần của đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.



Hình 145

Đảo. Lấy một điểm I bất kì thuộc đường thẳng AB nhưng không nằm giữa A và B. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của IN với AD, của IM với AC. Khi đó rõ ràng mp(MNP) cắt AC tại Q và giao điểm của QM và PN là I.

Kết luận. Quỹ tích giao điểm I của QM và PN là đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.

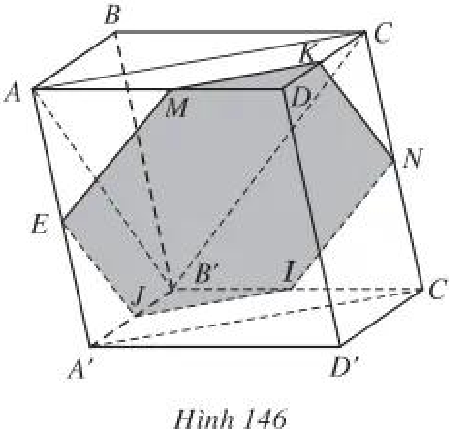
c) Tương tự như câu b), ta có quỹ tích giao điểm J của QN và PM là đoạn thẳng AO (O là giao điểm của DM và CN).

5. (h.146)

a) Cách 1.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{CC'}.$$

Theo định lí Ta-lét đảo thì MN song song với mp(P), ở đó (P) song song với AC và DC'. Mặt khác $DC' \parallel AB'$. Vậy $MN \parallel (ACB')$.



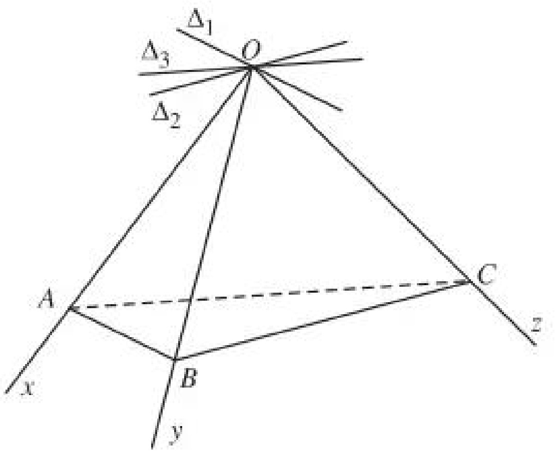
Hình 146

Cách 2. Kẻ MK song song với AC cắt CD tại K. Dễ thấy $KN \,//\, DC'$, do đó $KN \,//\, AB'$. Từ đó suy ra $(MKN) \,//\, (ACB')$. Vậy $MN \,//\, (ACB')$.

b) Kẻ $MK \,//\, AC$ $(K \in CD)$; kẻ $NI \,//\, CB'$ $(I \in C'B')$; kẻ $IJ \,//\, A'C'$ $(J \in A'B')$; kẻ $JE \,//\, AB'$ $(E \in AA')$. Thiết diện là lục giác $MKNIJE$.

6. (h.147)

Cách 1. Giả sử $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ lần lượt là ba đường phân giác ngoài của các góc xOy, yOz, zOx. Nếu trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC$ thì dễ thấy $\Delta_1 \,//\, AB$, $\Delta_2 \,//\, BC$, $\Delta_3 \,//\, CA$. Vậy $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng phẳng.

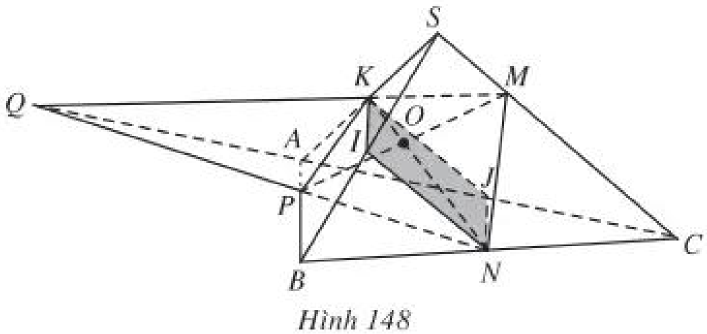


Hình 147

Cách 2. Lấy các điểm A, B, C như cách 1 và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó, các vectơ $\vec{v}_1 = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v}_2 = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{v}_3 = \vec{c} - \vec{a}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Vì $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ nên ba vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ đồng phẳng, suy ra ba đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng phẳng.

7. (h.148)



Hình 148

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và AC thì dễ thấy các điểm K, I, N, J cùng thuộc mặt phẳng song song với AB và SC. Vậy câu a) được chứng minh.

b) Nếu M là trung điểm của SC thì thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mp(MKN) là hình bình hành $MKPN$, trong đó P là trung điểm của

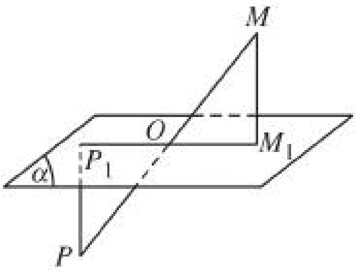
AB. Khi đó KN chia hình bình hành $MKPN$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Nếu M không là trung điểm của SC. Gọi Q là giao điểm của KM và AC, P là giao điểm của QN và AB. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mp(MKN) là tứ giác $MKPN$.

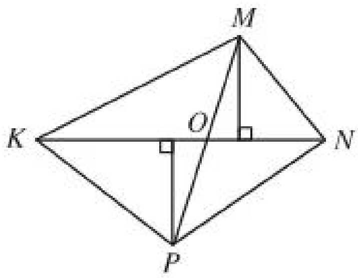
Để chứng minh KN chia tứ giác $MKPN$ thành hai phần có diện tích bằng nhau, trước hết ta có nhận xét sau :

Kí hiệu (α) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC ; gọi O là giao điểm của đoạn thẳng MP với mp(α). Khi đó

$d(M\,;(\alpha)) = d(P\,;(\alpha)) \Leftrightarrow OM = OP$ (h.149) (bạn đọc tự chứng minh).



Hình 149



Hình 150

Bây giờ ta chứng minh tứ giác $MKPN$ bị KN chia thành hai phần có diện tích bằng nhau, tức là

$$S_{MKN} = S_{PKN} \Leftrightarrow d(M\,;KN) = d(P\,;KN) \Leftrightarrow OM = OP,$$

ở đó O là giao điểm của MP và KN, cũng chính là giao điểm của MP với mp(α) (h.150).

Như vậy $\qquad S_{MKN} = S_{PKN} \Leftrightarrow d(M\,;(\alpha)) = d(P\,;(\alpha))$.

Mặt khác SC // mp(α), AB // mp(α) nên

$$d(M\,;(\alpha)) = d(P\,;(\alpha)) \Leftrightarrow d(S\,;(\alpha)) = d(A\,;(\alpha)).$$

Đẳng thức cuối cùng này luôn đúng vì SA cắt mp(α) tại trung điểm K của SA.

Như vậy ta luôn có $S_{MKN} = S_{PKN}$.

Chú ý. Có thể chứng minh KN chia tứ giác $MKPN$ thành hai phần có diện tích bằng nhau theo cách sau :

Gọi (α) là mặt phẳng qua K, song song với cả AB và SC ; (β) là mặt phẳng qua AB và song song với SC ; (γ) là mặt phẳng qua SC và song song với AB.

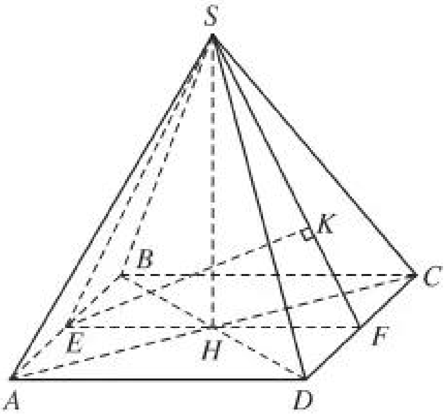
Khi đó, ba mặt phẳng (α), (β), (γ) đôi một song song. Gọi O là giao điểm của MP và KN thì O là giao điểm của MP với mp(α). Các mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt cắt SA tại K, A, S và cắt MP tại O, P, M. Theo định lí Ta-lét, ta có O là trung điểm của MP. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

8. (h.151) Gọi H là giao điểm của AC và BD. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên SH vuông góc với mặt đáy ($ABCD$).

a) Khoảng cách từ S đến mp($ABCD$) là SH.

SAC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên

$$SH = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



Hình 151

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có

$$d(AB\,;(SCD)) = d(E\,;(SCD)) = EK$$

(EK là đường cao của tam giác SEF).

$$EK = \frac{EF.SH}{SF} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{\dfrac{6a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c) Vì AB và SC chéo nhau, AB // mp(SCD) nên

$$d(AB\,;SC) = d(AB\,;(SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

d) Gọi C_1 là trung điểm của SC, do SAC là tam giác đều nên $AC_1 \perp SC$. Mặt khác $BD \perp SC$, nên (P) chính là mặt phẳng chứa AC_1 và song song với BD.

Kí hiệu H_1 là giao điểm của AC_1 và SH. Khi đó $(P) \cap (SBD) = B_1D_1$, trong đó B_1D_1 đi qua H_1 và song song với BD. Vậy thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AB_1C_1D_1$ (h.152).

Ta có $BD \perp (SAC)$, $B_1D_1 \parallel BD$ nên $B_1D_1 \perp (SAC)$, suy ra

$$B_1D_1 \perp AC_1.$$

Từ đó

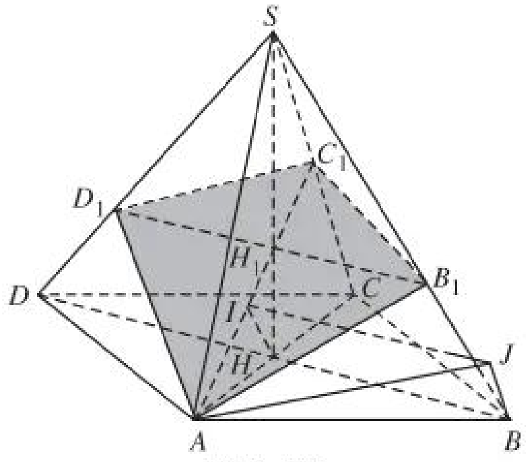
$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}AC_1.B_1D_1.$$

$$AC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2},\ B_1D_1 = \frac{2}{3}BD$$

(vì H_1 là trọng tâm tam giác SAC).

Vì vậy

$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 152

e) *Cách 1.* Trong mp(SAC), kẻ HI song song với CC_1 cắt AC_1 tại I thì $HI \perp (P)$ vì $SC \perp (P)$.

Ta lấy điểm J sao cho $BHIJ$ là hình bình hành thì $BJ \perp (P)$, từ đó $\widehat{BAJ}$ là góc giữa BA và mp(P) (h.152).

$$\sin\widehat{BAJ} = \frac{BJ}{BA} = \frac{HI}{BA} = \frac{\frac{1}{2}CC_1}{BA} = \frac{\frac{1}{4}SC}{BA} = \frac{\frac{1}{4}a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy góc giữa BA và mp(P) là α mà $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $0^o < \alpha < 90^o$.

Cách 2. Vì $AB \parallel CD$ nên góc α giữa đường thẳng AB và (P) bằng góc giữa đường thẳng CD và (P). Mặt khác $SC \perp (P)$, nên góc α và góc SCD phụ nhau.

Vậy

$$\sin\alpha = \cos\widehat{SCD} = \frac{\frac{1}{2}CD}{SC} = \frac{\frac{1}{2}a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ 0^o < \alpha < 90^o.$$

9. Ta có

$$AC^2 = 3a^2,\ AB'^2 = 2a^2,\ AC'^2 = 3a^2 + m^2,\ B'C'^2 = 4a^2 + (m-a)^2.$$

a) • Tam giác $AB'C'$ vuông ở A khi và chỉ khi

$$5a^2 + m^2 - 2ma = 2a^2 + 3a^2 + m^2.$$

Vậy tam giác $AB'C'$ vuông ở A khi và chỉ khi $m = 0$.

• Tam giác $AB'C'$ vuông ở C' khi và chỉ khi

$$2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m - a)^2.$$

Điều này không xảy ra.

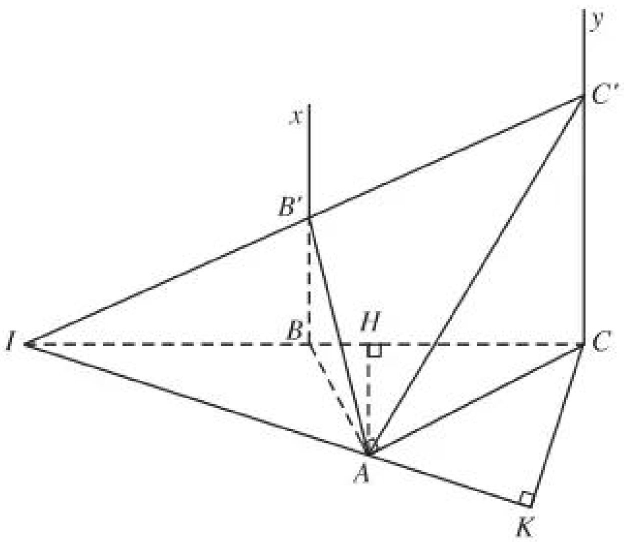
• Tam giác $AB'C'$ vuông ở B' khi và chỉ khi

$$2a^2 + 4a^2 + (m - a)^2$$

$$= 3a^2 + m^2$$

$\Leftrightarrow m = 2a.$

Vậy tam giác $AB'C'$ vuông ở B' khi và chỉ khi $m = 2a$ (h.153).



Hình 153

b) • Giả sử tam giác $AB'C'$ vuông ở B', tức là $m = 2a$.

Vì $AH \perp BC$ nên

$$BH.BC = AB^2 = a^2$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a}{2},$$

từ đó

$$HC = \frac{3a}{2} \text{ và } B'H^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}\ ;$$

$$C'H^2 = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 = \frac{25a^2}{4}\ ;\ B'C'^2 = 5a^2.$$

Như vậy

$$B'H^2 + B'C'^2 = C'H^2,$$

tức là tam giác $B'C'H$ vuông tại B'.

• Tính góc giữa mp(ABC) và mp($AB'C'$) khi $m = 2a$.

Xét phép chiếu lên mp(ABC). Ta có tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $AB'C'$. Gọi φ là góc giữa mp(ABC) và mp($AB'C'$) thì

$$S_{ABC} = S_{AB'C'} \cos\varphi.$$

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \ ;$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AB'.B'C' = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}.$$

Từ đó

$$\cos\varphi = \frac{a^2\sqrt{3}}{a^2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy góc giữa mp(ABC) và mp($AB'C'$) là φ được tính bởi $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$, $0^{\circ} < \varphi < 90^{\circ}$.

Chú ý. Có thể tính góc φ giữa mp(ABC) và mp($AB'C'$) như sau :

Gọi I là giao điểm của $B'C'$ và BC. Do $BB' \mathbin{//} CC'$, $BB' = a$, $CC' = 2a$ nên $BC = BI$, $B'C' = B'I$.

Ta có

$$AI = \text{mp}(ABC) \cap \text{mp}(AB'C').$$

Kẻ CK vuông góc với AI. Vì $C'C \perp \text{mp}(ABC)$ nên $C'K \perp AI$.

Vậy $\widehat{C'KC} = \varphi$ (h.153).

Ta có $\tan\varphi = \dfrac{CC'}{CK}$.

Mặt khác $CK.AI = IC.AH$, suy ra

$$CK = \frac{IC.AH}{AI}.$$

Ta lại có

$$AI^2 = AC^2 + IC^2 - 2AC.IC.\cos\widehat{ACI}$$

$$= 3a^2 + 16a^2 - 2a\sqrt{3}.4a.\frac{\sqrt{3}}{2} = 7a^2$$

nên $AI = a\sqrt{7}$.

Vậy

$$CK = \frac{IC.AH}{AI} = \frac{4a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Từ đó $\tan\varphi = \frac{\sqrt{21}}{3}$.