MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1

(Sau khi học xong §1)

Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.

1) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

2) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{IJ}$.

Đáp án (h.136)

1) (5 điểm)

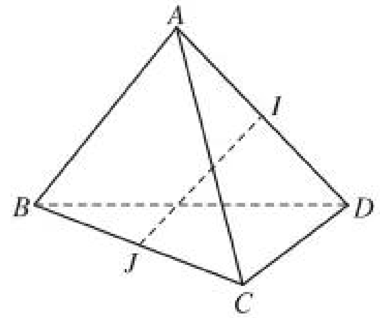
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Vì $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên

$$AB = AC = AD = a$$

và $\quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^o$

nên $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0.$



Hình 136

2) (5 điểm)

Ta có $\quad \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$

Vậy $\quad \overrightarrow{IJ}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})^2$

$$= \frac{1}{4}(AB^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + a^2) = \frac{2a^2}{4}.$$

Từ đó $\quad \left|\overrightarrow{IJ}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Đề 2

(Sau khi học xong §4)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAB là tam giác đều và mp($ABCD$) vuông góc với mp(SAB).

1) Chứng minh mp(SAD) $\perp$ mp(SAB).

2) Tính góc giữa AB và SC.

Đáp án (h.137)

1) (5 điểm)

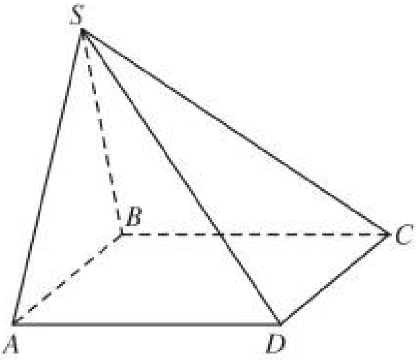
Vì mp(SAB) $\perp$ mp($ABCD$) và $AD \perp AB$ nên $AD \perp (SAB)$, từ đó $(SAD) \perp (SAB)$.

2) (5 điểm)

Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa AB và SC bằng góc giữa CD và SC.

Ta tính góc $\widehat{SCD}$.

Đặt cạnh hình vuông $ABCD$ là a thì $SA = a$ nên $SC = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{2}$, $CD = a$.



Hình 137

Mặt khác

$$SD^2 = CS^2 + CD^2 - 2CS.CD\cos\widehat{SCD}$$

nên $$2a^2 = 2a^2 + a^2 - 2.a\sqrt{2}.a\cos\widehat{SCD}$$

suy ra $\cos\widehat{SCD} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy góc giữa SC và AB bằng α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$.

Đề 3

(Sau khi học xong §5)

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Đáp án (h.138)

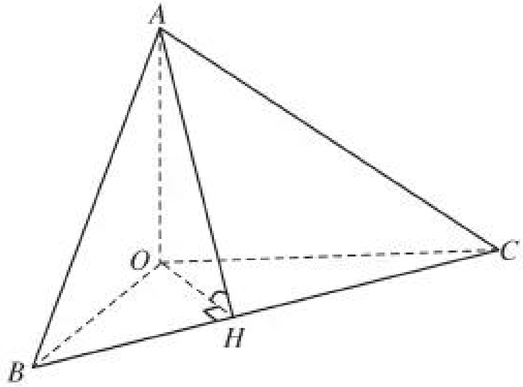
a) (5 điểm)

Kẻ OH vuông góc với BC tại H. Vì $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$ nên $OA \perp OH$.

Vậy OH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng OA và BC.

Trong tam giác vuông OBC ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$



Hình 138

suy ra

$$OH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

b) (5 điểm)

Vì $OA \perp mp(OBC)$ nên $OA \perp BC$, mà $OH \perp BC$, suy ra $BC \perp mp(AOH)$.

Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng góc $\widehat{AHO}$.

Trong tam giác vuông AOH, ta có

$$\tan \widehat{AHO} = \frac{AO}{OH} = \frac{a}{\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc}.$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng α với

$$\tan \alpha = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc}.$$

Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

1) Tìm điểm O cách đều các điểm S, A, B, C, D và tính khoảng cách từ O đến các điểm đó.

2) Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB, SC, SD. Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

Đáp án (h.139)

1) (4 điểm)

Vì $SA \perp (ABCD)$, $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$.

Tương tự ta cũng có $CB \perp SB$.

Ngoài ra $CA \perp SA$.

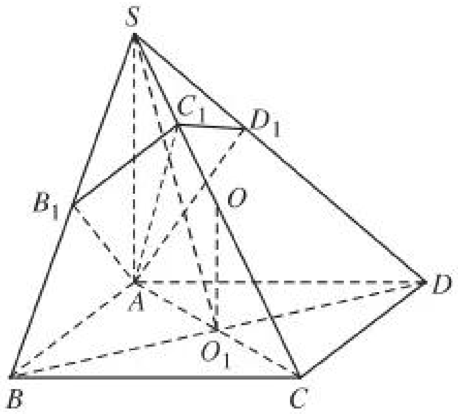
Vậy điểm cách đều S, A, B, C, D là trung điểm O của SC. Ta có

$$OS = \frac{1}{2}SC,$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2$$

$$= a^2 + a^2 + 3a^2 = 5a^2.$$

Vậy $OS = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



Hình 139

Chú ý. Có thể tìm O bằng cách sau :

Gọi O_1 là giao điểm của AC và BD. Kẻ đường thẳng O_1t vuông góc với mp($ABCD$) thì mọi điểm thuộc O_1t cách đều A, B, C, D. Do $O_1A = O_1C$, $SA \perp$ mp($ABCD$) nên O_1t đi qua trung điểm O của SC. Tam giác SAC vuông tại A nên O là điểm cần tìm.

2) (3 điểm)

Dễ thấy $BC \perp (SAB)$, suy ra $AB_1 \perp BC$, mặt khác $AB_1 \perp SB$ nên $AB_1 \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AD_1 \perp SC$, ngoài ra $AC_1 \perp SC$. Vậy A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

3) (3 điểm)

Ta có
$$(SCD) \cap (ABCD) = CD$$
$$AD \perp DC$$
$$SD \perp DC.$$

Vậy góc giữa mp(SCD) và mp($ABCD$) bằng góc giữa AD và SD, mặt khác tam giác SAD vuông tại A nên góc nói trên là $\widehat{SDA}$.

$$\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^{\circ}.$$

Đề 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Gọi E là trung điểm của SA. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm E và song song với AB cắt các cạnh SB, BC, AD lần lượt tại M, N, F.

1) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình gì ?

2) Tính diện tích thiết diện nói trên theo a và x, với $x = AF$.

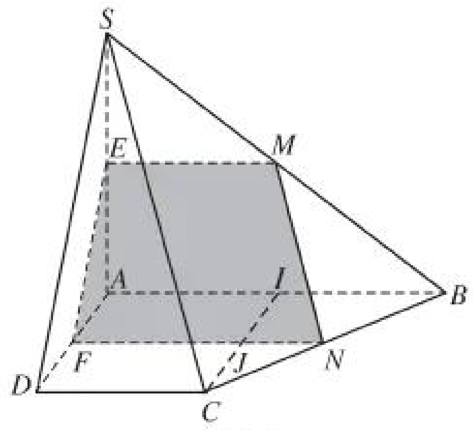
3) Gọi H là hình chiếu của điểm D trên (P). Chứng tỏ H thuộc một đường tròn cố định.

Đáp án (h.140)

1) (3 điểm)

Vì (P) // AB, $AB \subset (SAB)$ mà $EM = (P) \cap (SAB)$ nên EM // AB. Tương tự như trên ta có FN // AB. Mặt khác $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp EF$. Như vậy thiết diện $EMNF$ của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình thang vuông tại E và F.

Khi F trùng với D thì thiết diện là hình chữ nhật.



Hình 140

2) (4 điểm)

$$EM = a, EF = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Gọi I là trung điểm của AB thì

$$AI = IB = a.$$

Gọi J là giao điểm của FN và CI thì $FJ = AI = a$, $IJ = AF = x$.

$$\frac{JN}{IB} = \frac{CJ}{CI} \Rightarrow JN = IB.\frac{CJ}{CI} = a.\frac{a - x}{a} = a - x.$$

Vậy $FN = a + a - x = 2a - x$. Do đó

$$S_{EMNF} = \frac{1}{2}(EM + FN).EF = \frac{1}{2}(a + 2a - x).\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$= \frac{(3a - x)\sqrt{a^2 + x^2}}{2}.$$

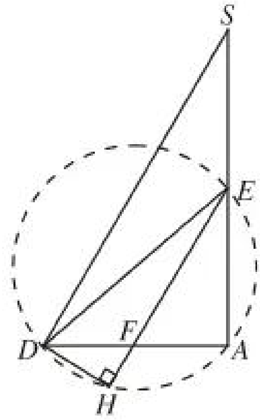
3) (3 điểm)

Vì $EM \perp (SAD)$ nên $(P) \perp (SAD)$.

Ngoài ra ta có

$$(P) \cap (SAD) = EF.$$

Vì H là hình chiếu của D trên (P) nên H thuộc đường thẳng EF.



Hình 141

Trong mp(SAD) có $\widehat{DHE} = 90^{\circ}$; E, D cố định. Vậy H thuộc đường tròn đường kính DE trong mặt phẳng (SAD) (h.141).

Chú ý. Vì F chỉ thuộc đoạn AD nên H chỉ thuộc cung AD của đường tròn trên, cung khác phía với điểm S trong mp(ADS).