ÔN TẬP CHƯƠNG III

I – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Vì chỉ có ba tiết trên lớp dành cho phần ôn tập chương nên cần hướng dẫn học sinh chuẩn bị kĩ ở nhà mục "Câu hỏi tự kiểm tra" và làm các bài ôn tập.

2. Tuỳ thuộc vào thời gian và khả năng tiếp thu của học sinh mà chọn bài ôn tập để chữa. Tuy nhiên trong các bài tập đó, theo chúng tôi nên chú ý đến các bài tập số 1 và số 6. Riêng bài tập 8 vừa mang đặc trưng toán học, vừa tạo được tính "ham hiểu biết" của người học. Cũng có thể giới thiệu ở dạng ngoại khoá một bài tập nữa như dạng của bài tập 8, chẳng hạn bài tập sau :

"Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OC = OA + OB$. Chứng minh rằng tổng ba góc tại đỉnh C của tứ diện đó bằng 90^o". Có thể chứng minh bằng cách lấy hình vuông có cạnh bằng OC và chia nó thành bốn tam giác lần lượt bằng bốn mặt của tứ diện đã cho.

3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

II – GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. (h.127)

a) Vì $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$,

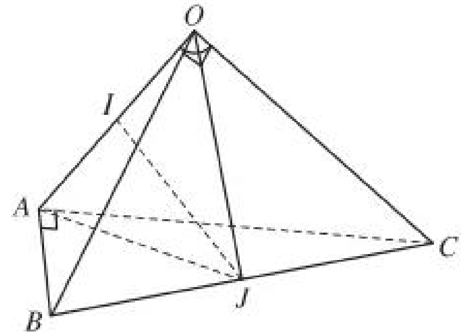
$OA = OB = OC = a$

nên $AB = AC = a$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta OBC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$ nên $OA \perp BC$.



Hình 127

b) Gọi I là trung điểm của OA, do $OJ = AJ$ nên $JI \perp OA$, mà $JI \perp BC$, vậy IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

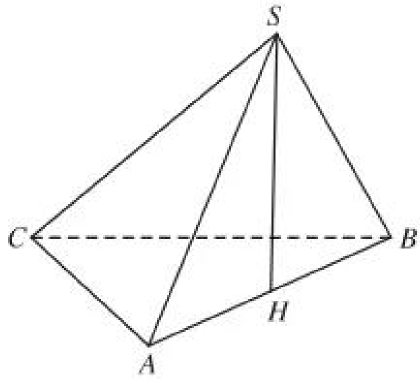
$$IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Suy ra $d(OA\,;BC) = \dfrac{a}{2}$.

c) Từ các kết quả trên ta có $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$, $IJ = \dfrac{1}{2}OA$. Vậy góc giữa mp(OBC) và mp(ABC) bằng góc $\widehat{OJA}$ và $\widehat{OJA} = 90^o$, do đó mp(OBC) $\perp$ mp(ABC).

Chú ý. Có thể giải câu a) bằng cách chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA} = 0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

2. (h.128)



Hình 128

a) Từ giả thiết ta suy ra $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Chú ý. Có thể làm cách khác như sau :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA}).(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB})$$

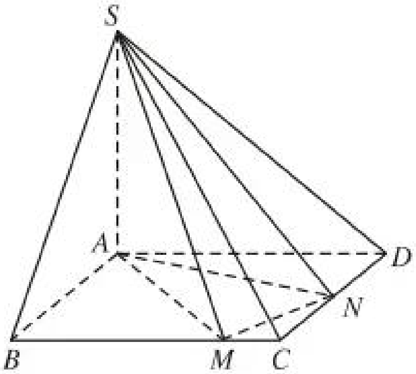
$$= \overrightarrow{CS}^2 - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$$

b) Kẻ $SH \perp mp(ABC)$, do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$ mà ΔABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB. Ta có

$$SH^2 = SA^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4}, \text{ tức là } SH = \frac{a}{2}.$$

3. (h.129)



Hình 129

a) Ta có AM, AN cùng vuông góc với SA mà $\widehat{MAN} \leq 90^\circ$ nên $\widehat{MAN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Hai mặt phẳng đó tạo với nhau góc 45° khi và chỉ khi $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Mặt khác $M \in BC$, $N \in CD$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên điều đó xảy ra khi $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$, từ đó ta có

$$1 = \frac{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{DAN}}{1 - \tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{DAN}}. \qquad (*)$$

Vì $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{a-x}{a}$, $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{a-y}{a}$, nên $(*) \Leftrightarrow 2a^2 + xy = 2a(x+y)$.

Đó là hệ thức liên hệ giữa x và y để các mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45°.

Chú ý. Có thể tìm thấy kết quả trên nhờ hệ thức

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos\widehat{MAN}, \text{ ở đó } \widehat{MAN} = 45^\circ.$$

b) Ta có $(SAM) \perp (ABCD)$, từ đó nếu $(SMN) \perp (SAM)$ thì giao tuyến MN của (SMN) và $(ABCD)$ sẽ vuông góc với (SAM), tức là $MN \perp AM$.

Ngược lại, nếu có $MN \perp AM$ thì do $SA \perp MN$ nên $MN \perp (SAM)$, suy ra $(SMN) \perp (SAM)$.

Vậy $(SAM) \perp (SMN)$ khi và chỉ khi $\widehat{AMN} = 90^{\circ}$,

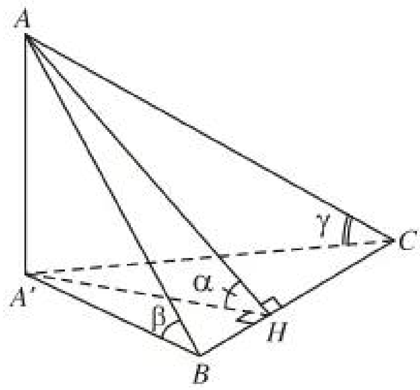
tức là $$a^2 + (a - x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a - y)^2$$

$$\Leftrightarrow ay = x(a - x)$$

với $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$. Đó là hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

4. (h.130) Kẻ AA' vuông góc với mp(P) thì $\widehat{ABA'}$, $\widehat{ACA'}$ lần lượt là góc giữa AB, AC với mp(P), theo giả thiết $\widehat{ABA'} = \beta$, $\widehat{ACA'} = \gamma$.

Kẻ đường cao AH của tam giác vuông ABC, do $AA' \perp (P)$ nên $A'H \perp BC$, như vậy $\widehat{AHA'}$ là góc giữa mp(ABC) và mp(P), theo giả thiết $\widehat{AHA'} = \alpha$. Ta có



Hình 130

$$\sin\beta = \frac{AA'}{AB},\ \sin\gamma = \frac{AA'}{AC},\ \sin\alpha = \frac{AA'}{AH}.$$

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Suy ra $\dfrac{AA'^2}{AH^2} = \dfrac{AA'^2}{AB^2} + \dfrac{AA'^2}{AC^2}$ hay $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Chú ý. Khi mp$(ABC) \perp (P)$ thì kết quả hiển nhiên đúng.

5. (h.131) Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và H là hình chiếu của O trên mp(ABC) nên H là trực tâm tam giác ABC (BT17, chương III, SGK). Từ đó $HC_1 \perp AB$ (C_1 là giao điểm của CH và AB), suy ra $OC_1 \perp AB$. Như vậy $\widehat{OC_1H}$ là góc giữa mp(OAB) và mp(ABC).

Ta có

$$S_{HAB} = S_{OAB}\cos\widehat{OC_1H}$$

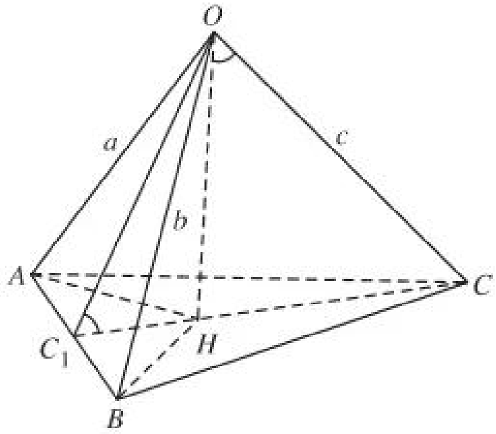
mà $\widehat{OC_1H} = \widehat{HOC}$ nên

$$S_{HAB} = S_{OAB}\cos\widehat{HOC}.$$

Ta lại có :

$$\cos\widehat{HOC} = \frac{OH}{OC},$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2},$$



Hình 131

từ đó $$\cos\widehat{HOC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Mặt khác $S_{OAB} = \frac{1}{2}ab.$

Vậy $$S_{HAB} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

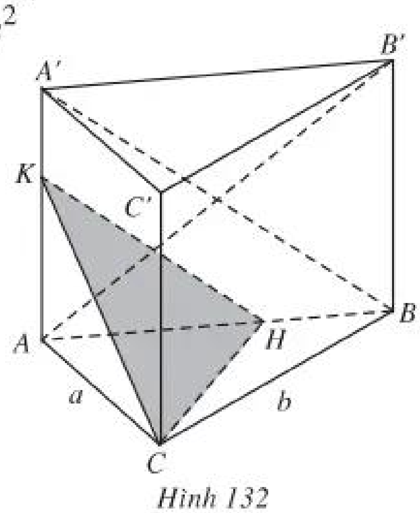
Tương tự như trên ta có

$$S_{HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\ ;$$

$$S_{HAC} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

6. (h.132)

a) Kẻ đường cao CH của tam giác vuông ABC thì $CH \perp AB'$ (định lí ba đường vuông góc). Trong mp($ABB'A'$) kẻ đường thẳng Ht vuông góc với AB'. Khi đó (P) chính là mp(CHt). Chú ý rằng do $ABB'A'$ là hình vuông nên $AB' \perp A'B$. Vậy $Ht \parallel A'B$, từ đó Ht cắt AA' tại điểm K thuộc đoạn AA'. Như vậy, thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mp(P) là tam giác CHK.



Hình 132

Do $CH \perp AB$, mp$(ABB'A') \perp$ mp(ABC) nên $CH \perp (ABB'A')$, từ đó tam giác CHK vuông tại H.

b) $S_{CHK} = \frac{1}{2}CH.HK$.

$$CH.AB = CA.CB \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$AH.AB = a^2 \Rightarrow AH = \frac{a^2}{AB},$$

$$\frac{HK}{A'B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HK = A'B.\frac{a^2}{AB^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}.a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Từ đó $$S_{CHK} = \frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

tức là $$S_{CHK} = \frac{a^3b\sqrt{2}}{2(a^2+b^2)}.$$

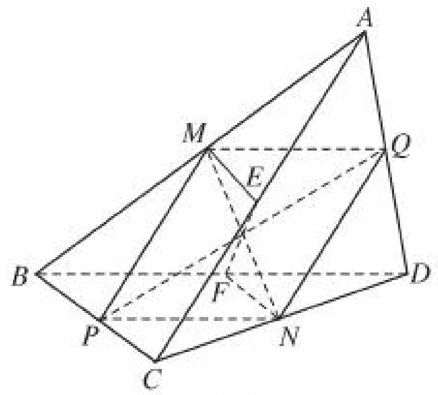
Chú ý. Có thể xét bài toán đã cho khi không có giả thiết $ABB'A'$ là hình vuông. Từ đó Ht có thể cắt tia AA' tại điểm không thuộc đoạn AA'. Thiết diện có thể là hình thang vuông hoặc tam giác vuông. Bạn đọc tự vẽ hình và giải bài toán.

7. • Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ b) (h.133).

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) $\Rightarrow$ b). Do $AC = BD$ nên $MPNQ$ là hình thoi, vì thế $MN \perp PQ$. Tương tự ta có $MN \perp EF$, $PQ \perp EF$.

b) $\Rightarrow$ a). $MPNQ$ là hình bình hành mà $MN \perp PQ$ nên $MPNQ$ là hình thoi, tức là $MP = MQ$, từ đó $AC = BD$.



Hình 133

Tương tự như trên ta cũng có $BC = AD$, $AB = CD$.

• Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ c). (h.134)

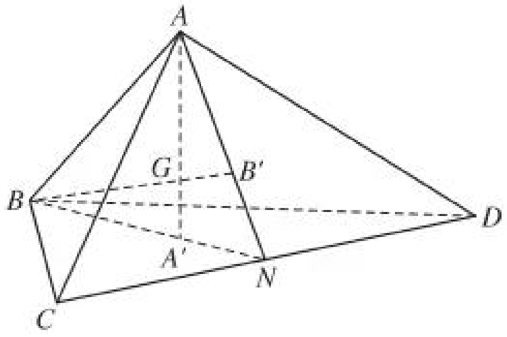
Gọi A', B' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.

a) $\Rightarrow$ c). Ta có $\Delta BCD = \Delta ADC$ (c.c.c) nên $BN = AN$, từ đó $A'N = B'N$. Vậy

$$\Delta AA'N = \Delta BB'N \text{ (c.g.c)},$$

suy ra $AA' = BB'$.

Tương tự như trên ta có điều phải chứng minh.



Hình 134

c) $\Rightarrow$ a). Do giả thiết ta có $BB' = AA'$, mà AA' cắt BB' tại G, $AG = 3GA'$, $BG = 3GB'$ (xem BT 22, chương II, SGK), từ đó $BG = AG$ và $GA' = GB'$. Các tam giác BGA' và AGB' bằng nhau nên $BA' = AB'$. Như vậy $BN = AN$,

mà
$$AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{CD^2}{2},$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \frac{CD^2}{2},$$

do đó

$$AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2. \quad (1)$$

Tương tự như trên ta có

$$CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2. \quad (2)$$

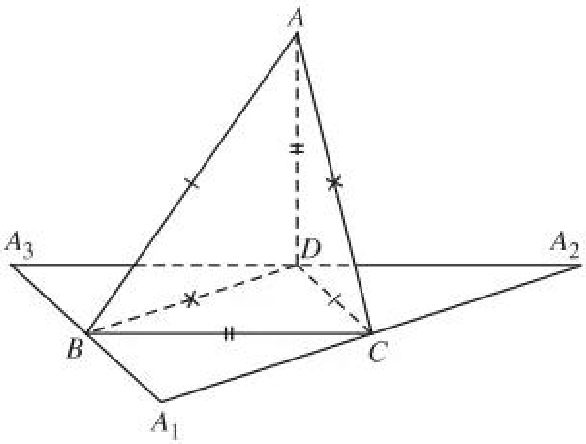
Từ (1), (2) ta suy ra $AD = BC$ và $AC = BD$. Tương tự như trên ta cũng có $AB = CD$.

• Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ d). (h.135)

a) $\Rightarrow$ d). Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác DCB nên tổng các góc tại B bằng 180°.

Đối với các đỉnh còn lại cũng lí luận tương tự như trên.

d) $\Rightarrow$ a). Trải các mặt ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng (BCD).



Hình 135

Do tổng các góc tại B cũng như tại C, tại D đều bằng 180° nên các bộ ba điểm A_1, C, A_2 ; A_2, D, A_3 ; A_3, B, A_1 là những bộ ba điểm thẳng hàng. Như vậy BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$. Từ đó $BD = A_1C = CA_2 = CA$. Tương tự ta cũng có $AD = BC$, $CD = AB$.

8. a) Xem hình vẽ 135.

Theo phần chứng minh d) $\Rightarrow$ a) của bài 7 thì ta có hình khai triển của tứ diện $ABCD$ trên mặt phẳng (BCD) làm thành tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chỉ cần chứng minh tam giác $A_1A_2A_3$ có ba góc nhọn.

Thật vậy, xét tam giác AA_1A_2 có $AC = A_1C = A_2C$ nên $AA_1 \perp AA_2$. Lí luận tương tự như trên, ta có AA_1, AA_2, AA_3 đôi một vuông góc, từ đó tứ diện $AA_1A_2A_3$ có mặt $A_1A_2A_3$ là tam giác có ba góc nhọn.

b) Học sinh tự làm.

Trả lời các câu hỏi trắc nghiệm

1. (C)	**2.** (C)	**3.** (D)	**4.** (C)
5. (D)	**6.** (D)	**7.** (D)	**8.** (B)
9. (B)	**10.** (B)	**11.** (A)	**12.** (A).