D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Hiểu rằng trong định nghĩa các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, x là số thực và là số đo rađian (không phải số đo độ) của góc (cung) lượng giác ;

– Hiểu tính chất chẵn - lẻ, tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác ; tập xác định và tập giá trị của các hàm số đó.

– Biết dựa vào trục sin, trục côsin, trục tang, trục côtang gắn với đường tròn lượng giác để khảo sát sự biến thiên của các hàm số tương ứng rồi thể hiện sự biến thiên đó trên đồ thị.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh nhận biết hình dạng và vẽ đồ thị của các hàm số lượng giác cơ bản (thể hiện tính tuần hoàn, tính chẵn - lẻ, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giao với trục hoành, ...).

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• SGK lớp 10 đã xây dựng khái niệm các giá trị lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$,... của góc (cung) lượng giác α. Chuyển sang hàm số lượng giác, do học sinh quen dùng chữ x để chỉ biến số của hàm số nên trong SGK lớp 11, các hàm số lượng giác được viết dưới dạng $y = \sin x$, $y = \cos x$,..., trong đó x là số thực và là số đo rađian (chứ không phải số đo độ) của góc (cung) lượng giác.

Cũng vì thế, trên các hình trong §1 này, sách không để tên hệ trục toạ độ gắn với đường tròn lượng giác (mà dùng các điểm $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$,... trong đó O là tâm, A là điểm gốc của đường tròn lượng giác).

• Đầu §1, SGK chưa đưa vào định nghĩa tổng quát về hàm số tuần hoàn với chu kì T ngay mà để định nghĩa này ở cuối §1 coi như tổng kết lại và tổng quát hoá tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác đã học, đồng thời giới thiệu thêm vài hàm số tuần hoàn khác. Điều này nhằm giảm nhẹ tính "hàn lâm". Tuy thế, trong SGK có *Bài đọc thêm* về dao động điều hoà và bài "*Em có biết ?*" về âm thanh để nhấn mạnh tính chất tuần hoàn của nhiều hiện tượng trong thực tế.

• SGK không chứng minh đầy đủ tính chất dương nhỏ nhất khi xác định chu kì của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, mặc dầu phép chứng minh là không quá phức tạp. Chẳng hạn với hàm số $y = \sin x$, SGK thừa nhận rằng số T thoả mãn $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi x phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Có thể dễ dàng chứng minh điều này như sau :

Trong đẳng thức $\sin(x + T) = \sin x$, cho $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta được $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$;

từ đó $\dfrac{\pi}{2}+T = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, vậy $T = k2\pi$, k là số nguyên nào đó. Trong các số T này, dễ thấy $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất. Tuy việc chứng minh dễ dàng như thế, nhưng không phải là yêu cầu chính của chương này nên SGK đã không trình bày (xem sách *Bài tập Đại số và Giải tích 11 nâng cao*).

• SGK trình bày việc khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$ nhờ theo dõi chuyển động của điểm K (hình chiếu trên trục sin của điểm M, $(OA, OM) = x$) ; điều đó giúp học sinh dễ hình dung sự biến thiên một cách trực quan hơn. Cũng tương tự như thế đối với các hàm số $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

• Trong SGK này, lập bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên một chu kì $[-\pi\ ;\ \pi]$, sau đó mới nhờ tính chất hàm số lẻ để đơn giản cách vẽ đồ thị (vẽ đồ thị hàm số trên $[0\ ;\ \pi]$ rồi lấy đối xứng qua gốc toạ độ O để được đồ thị hàm số trên $[-\pi\ ;\ \pi]$). Điều đó nhằm làm nổi bật hơn ý nghĩa của chu kì của hàm số $y = \sin x$ vừa được học.

• SGK đưa việc vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ về việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ với vectơ tịnh tiến $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ $\left(\right.$xuất phát từ công thức $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left.\right)$, rồi dựa vào đồ thị nhận được để lập bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$. Điều này một mặt giúp học sinh "hoạt động" nhiều hơn với đồ thị, một mặt giải thích cho việc vẫn gọi đồ thị của hàm số $y = \cos x$ là một *đường hình sin*. Tuy nhiên **H4** vẫn đòi hỏi kiểm nghiệm lại kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \cos x$ nhờ đồ thị bằng cách quan sát chuyển động của hình chiếu H của M trên trục côsin (M thuộc đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x$).

• Khi nói đến đồ thị của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$, SGK có giới thiệu khái niệm "đường tiệm cận " bằng cách giải thích ý nghĩa của từ "tiệm cận".

• Sách có đề cập đến khái niệm "tập giá trị" của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ một cách đơn giản bằng cách nêu nhận xét : Khi x thay đổi, các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1\ ;\ 1]$ nên tập giá trị của chúng là $[-1\ ;\ 1]$, còn hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ nhận mọi giá trị thực tuỳ ý nên tập giá trị của chúng là $\mathbb{R}$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

* ***Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến thực hiện trong 3 tiết như sau :

Tiết 1. Mục 1 a) b) c) ;

Tiết 2. Mục 1 d), 2a) ;

Tiết 3. Phần còn lại.

* ***Gợi ý về đồ dùng dạy học***

– Nên có bảng vẽ sẵn đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, đặc biệt đồ thị của hàm số $y = \sin x$. (Nên vẽ đơn vị trên các trục bằng nhau).

– Nếu có thiết bị dạy học về chuyển động của các điểm K, H, T theo thứ tự trên trục sin, trục côsin, trục tang khi điểm M (thuộc đường tròn lượng giác sao cho $(OA,\ OM) = x$) chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương thì giờ học sẽ sinh động hơn và tiết kiệm được thời gian.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Nhắc lại cách xác định sin x, cos x để chuyển tiếp sang định nghĩa các hàm số sin và côsin.

Trả lời. $\overline{OK} = \sin x$, $\overline{OH} = \cos x$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 2\pi = 1$.

H2 *Mục đích.* Ôn lại định nghĩa hàm số chẵn.

Trả lời. Hàm số $y = \cos x$ là một hàm số chẵn vì với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $\cos(-x) = \cos x$.

H3 *Mục đích*

– Nhận biết tính nghịch biến của hàm số $y = \sin x$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ nhờ đồ thị (bảng biến thiên chỉ mới xét trên $(-\pi\ ;\ \pi)$) ; điều đó còn giúp rèn luyện kĩ năng đọc đồ thị. (Cũng có thể quan sát chuyển động của điểm K trên trục sin).

– Nhờ tính chất tuần hoàn với chu kì 2π của hàm số $y = \sin x$ để suy ra hàm số đó nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.

Trả lời. Quan sát đồ thị (hoặc quan sát chuyển động của điểm K trên trục sin), ta thấy hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, nó nghịch biến trên mọi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

H4 *Mục đích.* Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi ; \pi]$ bằng cách quan sát chuyển động của hình chiếu H của điểm M trên trục côsin (bổ sung cho cách quan sát đồ thị).

Cách làm. Xét điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x$:

Khi M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ A' đến A, hình chiếu H của M trên trục côsin chạy dọc trục đó từ A' đến A nên $\overline{OH}$ tức là $\cos x$ tăng từ -1 đến 1 ;

Khi M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ A đến A', điểm H chạy dọc trục côsin từ A đến A' nên $\overline{OH}$ tức là $\cos x$ giảm từ 1 đến -1.

H5 *Mục đích.* Tương tự như **H3**

Trả lời. Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0 ; \pi)$, từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, nó nghịch biến trên mỗi khoảng $(2k\pi ; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

H6 *Mục đích.* Sử dụng tính chất tuần hoàn khi khảo sát sự biến thiên của hàm số.

Trả lời. Ta đã biết, hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ nên do tính chất tuần hoàn với chu kì π, nó đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Vì $3 - \sin x > 0$ với mọi x, nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số chỉ xác định với $x \in \mathbb{R}$ mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số chỉ xác định với $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos x \neq -1$, tức là $x \neq (2k + 1)\pi$ (để ý rằng $1 - \sin x \geq 0$ và $1 + \cos x \geq 0$ với mọi x). Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số chỉ xác định với $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \neq 0$, tức là $2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hay $x \neq \frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. a) $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ vì $\sin(-x) = -\sin x$ với mọi x.

b) $y = 3\sin x - 2$ không phải là hàm số lẻ, cũng không phải là hàm số chẵn vì nếu đặt $f(x) = 3\sin x - 2$ thì có $x \in \mathbb{R}$ mà $f(x) \neq \pm f(-x)$: chẳng hạn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5$.

c) $y = \sin x - \cos x$ không phải là hàm số lẻ, cũng không phải là hàm số chẵn vì nếu đặt $f(x) = \sin x - \cos x$ thì $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

d) $y = f(x) = \sin x \cos^2 x + \tan x$ là hàm số xác định trên

$$\mathscr{D}_1 = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Vì với mọi $x \in \mathscr{D}_1$, ta có $-x \in \mathscr{D}_1$ và

$$f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) + \tan(-x) = -\sin x\cos^2 x - \tan x = -f(x)$$

nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

3. a) Do hàm số $y = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là 1, giá trị nhỏ nhất là -1 (để ý rằng $u = x + \frac{\pi}{3}$ lấy mọi giá trị thực tuỳ ý khi x thay đổi) nên hàm số $y = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + 3$ đạt giá trị lớn nhất là 5, giá trị nhỏ nhất là 1.

b) Do $y = \sin(x^2)$ đạt giá trị lớn nhất là 1 (khi $x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, k nguyên không âm), đạt giá trị nhỏ nhất là -1 (khi $x^2 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, k nguyên dương) nên hàm số $y = \sqrt{1-\sin(x^2)} - 1$ đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{2} - 1$ và giá trị nhỏ nhất là -1.

c) Do $y = \sin\sqrt{x}$ đạt giá trị lớn nhất là 1 (khi $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, k nguyên không âm), đạt giá trị nhỏ nhất là -1 (khi $\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, k nguyên dương) nên hàm số $y = 4\sin\sqrt{x}$ đạt giá trị lớn nhất là 4, giá trị nhỏ nhất là -4.

4. Với chú ý rằng $J_3 = \left(8\pi - \frac{\pi}{4}\,;\, 8\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad J_4 = \left(-150\pi - \frac{2\pi}{3}\,;\, -150\pi - \frac{\pi}{4}\right)$,

ta có bảng sau, trong đó dấu "+" có nghĩa "đồng biến", dấu "o" có nghĩa "không đồng biến" :

Hàm số	J_1	J_2	J_3	J_4
$f(x) = \sin x$	o	+	+	o
$g(x) = \cos x$	+	o	o	+
$h(x) = \tan x$	+	+	+	o

5. a) Sai, vì chẳng hạn trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến nhưng hàm số $y = \cos x$ không nghịch biến.

b) Đúng, vì nếu trên khoảng J, hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì với x_1, x_2 tuỳ ý thuộc J mà $x_1 < x_2$, ta có $\sin^2 x_1 < \sin^2 x_2$, từ đó

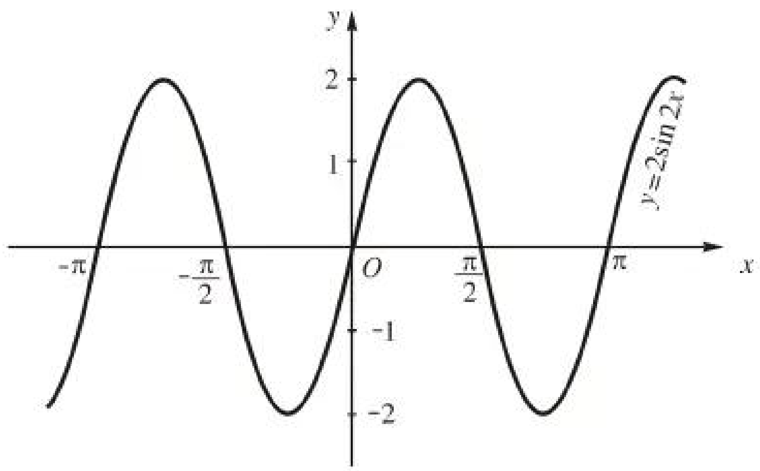
$\cos^2 x_1 = 1 - \sin^2 x_1 > 1 - \sin^2 x_2 = \cos^2 x_2$, tức là hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến trên J.

6. a) Ở đây $f(x + k\pi) = 2\sin 2(x + k\pi)$ và $f(x) = 2\sin 2x$, nên ta cần chứng minh $2\sin(2x + 2k\pi) = 2\sin 2x$, tức là chứng minh $\sin(2x + k2\pi) = \sin 2x$ với mọi x. Điều này suy ra từ $\sin(u + k2\pi) = \sin u$ với mọi u.

b)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$2x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\sin 2x$	0	-2	0	2	0

c) Xem hình 1.1.



Hình 1.1

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

1. Chu kì của hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$

Nhắc lại rằng : Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm số tuần hoàn* nếu có số $T \neq 0$ sao cho $f(x + T) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Dễ thấy rằng tập hợp các số T như thế cùng với số 0 làm thành một nhóm con $\mathcal{P}$ của nhóm cộng $\mathbb{R}$.

Thật vậy, nếu $T_1, T_2 \in \mathcal{P}$ thì

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x),$$

tức là $T_1 + T_2 \in \mathcal{P}$.

Nếu $T \in \mathcal{P}$ thì

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x),$$

tức là $-T \in \mathcal{P}$.

• Khi tập các số dương trong $\mathcal{P}$ có số nhỏ nhất thì số dương này được gọi là *chu kì* của hàm số f.

Có những hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kì.

Ví dụ

a) Hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$ là một hàm số tuần hoàn mà nhóm $\mathcal{P}$ nói trên của nó chính là nhóm cộng $\mathbb{R}$. Do tập các số thực dương không có số nhỏ nhất nên hàm số này không có chu kì.

b) Hàm số

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto D(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ}, \\ 0 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \end{cases} \end{aligned}$$

là hàm số tuần hoàn mà với mọi số hữu tỉ T, $D(x + T) = D(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số này cũng không có chu kì.

• Có thể chứng minh rằng hàm số liên tục, tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nhưng không có chu kì phải là hàm số không đổi.

• Một số sách gọi mỗi số $T \neq 0$ của nhóm $\mathcal{P}$ nói trên là một chu kì của hàm số tuần hoàn f và gọi số T dương nhỏ nhất của $\mathcal{P}$ (nếu có) là *chu kì cơ bản* của f.

2. Hàm số vòng và hàm số lượng giác

Có một số SGK nước ngoài dùng từ "hàm số vòng" để chỉ các hàm số mà trong SGK này gọi là hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ với biến số x chỉ số đo rađian của cung lượng giác (chữ "vòng" gắn với vòng tròn lượng giác), và dành từ "hàm số lượng giác" để chỉ các hàm số $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$, $y = \tan\theta$, $y = \cot\theta$ với θ là số đo bằng độ của góc (cung) lượng giác.

3. Biến đổi đồ thị

Giả sử đã biết đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = f(x)$ (trong hệ toạ độ Oxy với vectơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$, trên trục Oy là $\vec{j}$).

Khi đó :

– Đồ thị của hàm số $y = f(x) + a$ có được do tịnh tiến $(\mathscr{C})$ theo vectơ $a\vec{j}$.

– Đồ thị của hàm số $y = f(x - a)$ có được do tịnh tiến $(\mathscr{C})$ theo vectơ $a\vec{i}$.

– Đồ thị của hàm số $y = af(x)$ $(a \neq 0)$ là ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép co dãn theo phương trục tung (xuống trục hoành) với hệ số co dãn a, tức là ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép biến đổi biến điểm $(x\,;\,y)$ thành điểm $(x\,;\,ay)$ (ta có phép dãn khi $|a| > 1$, phép co khi $|a| < 1$, phép đối xứng qua trục hoành khi $a = -1$).

– Đồ thị của hàm số $y = f(ax)$ $(a \neq 0)$ là ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép co dãn theo phương trục hoành (xuống trục tung) với hệ số co dãn $\frac{1}{a}$, tức là ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép biến đổi biến điểm $(x\ ;\ y)$ thành điểm $\left(\frac{x}{a}\ ;\ y\right)$ (ta có phép co khi $|a| > 1$, phép dãn khi $|a| < 1$, phép đối xứng qua trục tung khi $a = -1$).