# D. NỘI DUNG CHI TIẾT

## A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (6 tiết)

### §1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0 (1 tiết)

#### I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm được định nghĩa dãy số có giới hạn 0 ;

– Ghi nhớ một số dãy số có giới hạn 0 thường gặp.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết vận dụng định lí và các kết quả đã nêu ở mục 2) để chứng minh một số dãy số có giới hạn 0.

#### II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Ta biết rằng dãy số có giới hạn 0 được phát biểu một cách đầy đủ như sau :

*Ta nói rằng dãy số $(u_n)$ có giới hạn là 0, nếu với một số dương $\varepsilon$ bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

*Khi đó ta viết*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \text{ viết tắt là } \lim u_n = 0 \quad \text{hoặc} \quad u_n \to 0.$$

Trong một số sách, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ được viết là $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Các SGK trong nước và nước ngoài trước đây đã giới thiệu định nghĩa này trong nhiều năm. Tuy nhiên qua giảng dạy, người ta đã thấy rằng định nghĩa này là quá khó đối với phần lớn học sinh ở cấp THPT dù rằng trước khi phát biểu định nghĩa, người ta đã cho nhiều ví dụ để chuẩn bị. Hiện nay hầu như trong tất cả các SGK Toán ở cấp THPT, các chữ $\varepsilon$ và $N$ đều không được nhắc đến nữa.

Định nghĩa dãy số có giới hạn 0 trong SGK là một cách phát biểu khác của định nghĩa vừa nêu. Cách phát biểu này giúp học sinh hình dung được dãy số có giới hạn 0 một cách thuận lợi hơn. Giáo viên nên dành nhiều thời gian cho ví dụ mở đầu, giúp học sinh hiểu định nghĩa thông qua ví dụ này.

Trong ví dụ mở đầu trước định nghĩa, các cụm từ "khi $n$ tăng thì các điểm biểu diễn chụm lại quanh điểm 0", "khoảng cách $|u_n| = \frac{1}{n}$ từ điểm $u_n$ đến điểm 0 trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là $n$ đủ lớn", ... là những cách diễn đạt khác nhau nhằm giúp học sinh hiểu được định nghĩa dãy số có giới hạn 0.

Sau khi học mục này, học sinh cần nhớ bốn dãy số có giới hạn 0 :

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$ ; b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ;

c) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ ; d) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Từ đó, áp dụng định lí 1, có thể cho nhiều ví dụ khác về dãy số có giới hạn 0.

## III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Để tận dụng thời gian giảng dạy trên lớp, nên vẽ trước hình 4.1 và bảng các giá trị của $|u_n|$ như trong SGK.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Hoạt động **H1** gồm những câu hỏi đơn giản nhằm giúp học sinh tiếp thu được định nghĩa dãy số có giới hạn 0. Các hoạt động **H2** và **H3** nhằm rèn luyện cho học sinh kĩ năng vận dụng hai định lí 1 và 2. Chúng được giải tương tự như ví dụ 2.

**H1** 51 ; 76 ; 501 ; 1 000 001.

**H2** $\left|\frac{1}{n^k}\right| = \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$ với mọi $n$.

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$, nên theo định lí 1 ta có $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

**H3** Vì $\left|\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{5}}{4^n}\right| \le \dfrac{1}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ với mọi $n$ và $\lim\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, nên $\lim\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{5}}{4^n} = 0$.

## IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**1.** a) *Gợi ý.* $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+5}\right| < \dfrac{1}{n}$ với mọi $n$ ; b) và c) Tương tự.

**2.** *Gợi ý.* $|u_n| < \dfrac{1}{n}$ với mọi $n$ ; $|v_n| = \left|\dfrac{(-1)^n\cos n}{n^2+1}\right| < \dfrac{1}{n^2}$ với mọi $n$.

**3.** *Gợi ý.* b) $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{2^n+1}\right| < \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ với mọi $n$.

**4.** a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{2}{3}$ với mọi $n$.

## V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

### Chứng minh định lí 2

Có thể chứng minh được định lí sau :

ĐỊNH LÍ. *Nếu* $(u_n)$ và $(v_n)$ *là hai dãy số có giới hạn* 0 và $c$ *là một hằng số thì các dãy số* $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ *và* $(cu_n)$ *cũng có giới hạn* 0.

Ta áp dụng định lí trên và định lí 1 trong bài để chứng minh định lí 2 :

$$\textit{Nếu } |q| < 1 \textit{ thì } \lim q^n = 0.$$

Thật vậy, nếu $q = 0$ thì hiển nhiên điều khẳng định là đúng. Nếu $0 < |q| < 1$ thì $\left|\dfrac{1}{q}\right| = \dfrac{1}{|q|} > 1$. Vì vậy có thể viết $\left|\dfrac{1}{q}\right| = 1 + h$ với $h > 0$. Do đó

$$\left|\frac{1}{q^n}\right| = (1+h)^n \ge 1 + nh > nh \text{ và } |q^n| < \frac{1}{h}.\frac{1}{n} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên, theo định lí trên, ta có $\lim\dfrac{1}{h}.\dfrac{1}{n} = 0$.

Từ đó suy ra $\lim q^n = 0$.