D. NỘI DUNG CHI TIẾT

A. TỔ HỢP (8 tiết)

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm vững hai quy tắc đếm cơ bản.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Vận dụng được hai quy tắc đếm cơ bản trong những tình huống thông thường. Biết được khi nào sử dụng quy tắc cộng, khi nào sử dụng quy tắc nhân.

– Biết phối hợp hai quy tắc này trong việc giải các bài toán tổ hợp đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Trên thực tế, học sinh cũng đã làm quen quy tắc cộng từ lớp dưới một cách chưa có ý thức. Bản chất toán học của quy tắc cộng là công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau :

Nếu A và B là hai tập hữu hạn không có phần tử chung thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Cũng như vậy, bản chất toán học của quy tắc cộng cho công việc với nhiều phương án là công thức tính số phần tử của hợp k tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau :

Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ *là* k tập hữu hạn và $A_i \cap A_j = \varnothing$ *với* $i \neq j$ (*với* $i, j = 1, ..., k$) *thì* $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$.

• Trong bài, khi phát biểu quy tắc cộng, ta ngầm hiểu rằng hai phương án A và B là phân biệt (nghĩa là không có một cách thực hiện nào mà được xem là thuộc cả hai phương án A và B).

Ví dụ 1

Giả sử trường A được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn học sinh đó là học sinh giỏi Toán hoặc là học sinh giỏi Văn. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng trường có 31 học sinh giỏi Văn và 22 học sinh giỏi Toán ?

Nếu ở trường đó mỗi học sinh giỏi Văn thì không giỏi Toán và mỗi học sinh giỏi Toán thì không giỏi Văn (tức là không có học sinh nào giỏi cả Văn và Toán) thì ta mới áp dụng được quy tắc cộng. Nếu trái lại thì phải áp dụng quy tắc cộng mở rộng (xem *Bài đọc thêm*). Chẳng hạn, nếu trường đó có 5 em là học sinh giỏi cả Văn và Toán thì theo quy tắc cộng mở rộng trường đó sẽ có $31 + 22 - 5 = 48$ (cách chọn).

• Khi vận dụng, nhiều học sinh hay nhầm lẫn quy tắc nhân với quy tắc cộng. Chẳng hạn, trong bài toán sau :

Ví dụ 2

Trong một lớp học có 20 nam và 23 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh : một bạn nam và một bạn nữ đi dự lễ kỉ niệm mừng Quốc khánh. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn ?

Sai lầm phổ biến học sinh thường mắc khi giải bài này là dùng quy tắc cộng cho rằng có $20 + 23 = 43$ (cách chọn). Thực ra ở đây phải dùng quy tắc nhân tức là có $20.23 = 460$ (cách chọn). (Nếu giáo viên chủ nhiệm chỉ được chọn một học sinh đi dự lễ kỉ niệm mừng Quốc khánh thì ta mới áp dụng quy tắc cộng). Khi đó giáo viên chủ nhiệm đó có $20 + 23 = 43$ (cách chọn).

• Trong phát biểu quy tắc nhân ở SGK (trang 54) ta đã giả thiết số n_i cách thực hiện công đoạn A_i chỉ phụ thuộc vào i ($i = 1, 2, ..., k$).

Nếu các cách thực hiện công đoạn A_i chỉ phụ thuộc vào i, tức là không phụ thuộc cách thực hiện các công đoạn trước đó thì quy tắc nhân được suy ra trực tiếp từ công thức tính số phần tử của tích Đề-các k tập hợp hữu hạn (xem các ví dụ 3, 4, 5, §1 SGK).

Cho k tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$. *Tích Đề-các của* $A_1, A_2, ..., A_k$, *kí hiệu là* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$, *là tập hợp tất cả các bộ k phần tử* $(a_1, a_2, ..., a_k)$ *trong đó* $a_i \in A_i$; *nghĩa là* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) \mid a_i \in A_i \ (i = 1, 2, ..., k)\}$. *Nếu* $A_1, A_2, ..., A_k$ *là k tập hữu hạn thì số phần tử của* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ *bằng tích các số phần tử của k tập hợp này, nghĩa là*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1| . |A_2| ... |A_k| .$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Bài toán mở đầu có mục đích kích thích trí tò mò của học sinh, để học sinh thấy sự cần thiết phải trang bị các quy tắc đếm.

H1 *Gợi ý*. Một mật khẩu có dạng chẳng hạn 00123a hoặc abht0m. Học sinh sẽ không thể liệt kê được hết các mật khẩu trong thời gian trên lớp vì có tới trên 1 tỉ mật khẩu. Giáo viên nên yêu cầu một vài học sinh ước đoán và xem em nào đoán sát nhất. Có thể hỏi các em đó rằng tại sao lại đoán số đó. "Bật mí" cho học sinh biết sau khi học xong bài này chúng ta sẽ biết cách đếm được chính xác có bao nhiêu mật khẩu một cách nhanh chóng.

H2 *Mục đích*. Kiểm tra xem học sinh đã biết vận dụng quy tắc cộng hay chưa.

Giải. Theo quy tắc cộng, ta có

$$8 + 7 + 10 + 6 = 31 \text{ (cách chọn).}$$

H3 *Mục đích*. Kiểm tra xem học sinh đã biết vận dụng quy tắc nhân hay chưa.

Giải. Việc lập một nhãn ghế bao gồm 2 công đoạn. Công đoạn thứ nhất là chọn 1 chữ cái trong 24 chữ cái. Công đoạn thứ hai là chọn 1 số trong 25 số nguyên dương nhỏ hơn 26.

Có 24 cách chọn chữ cái và 25 cách chọn số. Vậy có nhiều nhất là $24 \,.\, 25 = 600$ chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Theo quy tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn áo sơ mi.

2. Chữ số hàng chục có thể chọn trong các chữ số 2, 4, 6, 8 ; do đó có 4 cách chọn. Chữ số hàng đơn vị có thể chọn trong các chữ số 0, 2, 4, 6, 8 ; do đó có 5 cách chọn. Vậy theo quy tắc nhân, ta có $4 \,.\, 5 = 20$ số có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn.

3. a) Theo quy tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ (cách chọn).

b) Theo quy tắc nhân, ta có $280 \,.\, 325 = 91\,000$ (cách chọn).

4. a) Có $4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 256$ (số có bốn chữ số).

b) Nếu yêu cầu các chữ số khác nhau thì có $4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$ (số).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Công thức tính số phần tử của hợp một số tập hợp

Bài đọc thêm về mở rộng quy tắc cộng của SGK đã giới thiệu công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp A và B hữu hạn bất kì như sau :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Công thức này được mở rộng cho hợp của n tập hợp hữu hạn bất kì như sau :

ĐỊNH LÍ. *Cho* $A_1, ..., A_n$ *là* n *tập hợp hữu hạn* $(n \geq 2)$. *Khi đó*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < k \leq n} |A_i \cap A_k| + \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} |A_i \cap A_k \cap A_l|$$

$$+ ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|. \quad (1)$$

Chứng minh

Ta chứng minh công thức (1) bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, ta có $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Vậy (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử công thức (1) đúng với n tập hợp. Ta chứng minh (1) đúng với $n + 1$ tập hợp. Thật vậy, ta có

$$|A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup ... \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})|.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp để tính số phần tử của $A_1 \cup ... \cup A_n$ và số phần tử của $(A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})$, ta suy ra được công thức (1) đúng cho $n + 1$ tập hợp.

Ví dụ.

Trong tập $S = \{1, 2, ..., 280\}$ có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7 ?

Giải

Kí hiệu $A_1 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 2\}$, $A_2 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 3\}$, $A_3 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 5\}$, $A_4 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 7\}$. Bài toán yêu cầu tìm $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$.

Ta có

$$|A_1| = \frac{280}{2} = 140\ ; \qquad |A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93\ ;$$

$$|A_3| = \frac{280}{5} = 56\ ; \qquad |A_4| = \frac{280}{7} = 40\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{6}\right] = 46\ ; \qquad |A_1 \cap A_3| = \frac{280}{10} = 28\ ;$$

$$|A_1 \cap A_4| = \frac{280}{14} = 20\ ; \qquad |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{15}\right] = 18\ ;$$

$$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{21}\right] = 13\ ; \qquad |A_3 \cap A_4| = \frac{280}{35} = 8\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{30}\right] = 9\ ; \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \frac{280}{42} = 6\ ;$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \frac{280}{70} = 4\ ; \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{105}\right] = 2\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{210}\right] = 1.$$

Thay vào công thức (1) ta tìm được

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216.$$