D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm vững định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm và trên một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng ;

– Nhớ các công thức tính đạo hàm của một số hàm số thường gặp ;

– Hiểu được ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học của đạo hàm.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết tính đạo hàm của vài hàm số đơn giản tại một điểm theo định nghĩa ;

– Nắm vững cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm cho trước thuộc đồ thị hoặc có hệ số góc cho trước ;

– Ghi nhớ và vận dụng thành thạo các công thức đạo hàm của những hàm số thường gặp ;

– Vận dụng được công thức tính vận tốc tức thời của một chất điểm khi cho phương trình chuyển động của chất điểm đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Để làm ví dụ mở đầu dẫn đến khái niệm đạo hàm, trong SGK 2000 đã xét một bài toán chuyển động thẳng có phương trình chuyển động $s = s(t)$. Còn trong SGK hiện nay, các tác giả đã thay bài toán đó bằng bài toán chuyển động rơi tự do mà học sinh đã học ở Vật lí 10. Rơi tự do là chuyển động (không đều) khá đơn giản ở chỗ : đây là *chuyển động thẳng chỉ theo một hướng* từ trên xuống dưới. Hi vọng rằng điều này giúp học sinh dễ hình dung và dễ hiểu hơn.

2) Về đạo hàm của hàm số tại một điểm, SGK đã đưa ra định nghĩa

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (1)$$

rồi đặt $\Delta x = x - x_0$ để được

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Trong định nghĩa đó, cần chú ý mấy điểm sau :

– Định nghĩa được phát biểu với giả thiết điểm x_0 thuộc khoảng xác định của hàm số. Do đó, chẳng hạn đối với hàm số $y = \sqrt{x}$, ta không áp dụng định nghĩa để tính đạo hàm tại điểm $x = 0$. Chương trình cũng quy định không nêu khái niệm đạo hàm một bên.

– Khái niệm *số gia của biến số* (cũng như kí hiệu Δx) là một khái niệm khó đối với học sinh. Trong SGK của nước ngoài, người ta đã dành khá nhiều trang viết và đưa ra nhiều bài tập để học sinh làm quen với khái niệm này. Nhưng do thời lượng eo hẹp, các tác giả đã không thể làm được như thế. Để tập trung vào khái niệm quan trọng hơn là *đạo hàm*, các tác giả chỉ đưa ra các kí hiệu Δx và Δy cùng với các khái niệm *số gia của biến số* và *số gia của hàm số* sau khi đã định nghĩa đạo hàm, từ đó dẫn đến quy tắc tính đạo hàm của một hàm số theo định nghĩa.

– Cũng như nhiều sách khác, khái niệm *số gia của biến số* vẫn được định nghĩa bởi hiệu số $\Delta x = x - x_0$. Đó là một thủ pháp sư phạm nhằm đưa khái niệm vào một cách tự nhiên, giúp cho học sinh dễ tiếp nhận hơn. Tuy nhiên, nó cũng có một nhược điểm là có thể làm cho học sinh hiểu không thật đầy đủ về khái niệm này. Sau khi học sinh đã nắm được bài, giáo viên có thể tìm cơ hội, giải thích thêm rằng Δx là một số thực bất kì, miễn là thoả mãn điều kiện : $x_0 + \Delta x$ thuộc vào khoảng đang xét.

Học sinh cần hiểu Δx là một kí hiệu chứ không phải là tích Δ nhân với x. Nó không phụ thuộc vào biến số x và có thể thay thế bởi bất kì kí hiệu nào như h, hay k,.... Chẳng hạn, có sách đã định nghĩa

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

– Để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 tuỳ ý thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$, các tác giả nêu một quy tắc đơn giản, chỉ gồm hai bước cơ bản :

Bước 1. Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

Bước 2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

So với các SGK trước đây, các tác giả đã bỏ qua bước lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Điều đó là chấp nhận được, vì để lập tỉ số này, ta chỉ phải tiến hành một phép toán rất đơn giản, nói chung thường không phải tính toán khó khăn gì.

3) Về đạo hàm của hàm số trên khoảng, SGK đã định nghĩa :

Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên J (J là một khoảng hoặc hợp những khoảng nào đó) nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc J.

Từ định nghĩa này ta thấy :

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên J thì mỗi số thực $x \in J$ tương ứng với một số thực $f'(x)$ duy nhất ; do đó tồn tại một hàm số trên J, kí hiệu là f', được định nghĩa bởi :

$$f': \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$$

Hàm số f' (còn kí hiệu là y' và được gọi là *đạo hàm của hàm số f (trên J)*.

Việc đưa kí hiệu J vào nhằm đơn giản cách diễn đạt, đồng thời nhằm mở rộng định nghĩa khái niệm đạo hàm trên một hợp các khoảng (chẳng hạn, hàm số $y = |x|$ có đạo hàm trên hai khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$ hay hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm trên hợp vô số khoảng $(k\pi ; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$).

4) Ta đã chứng minh công thức

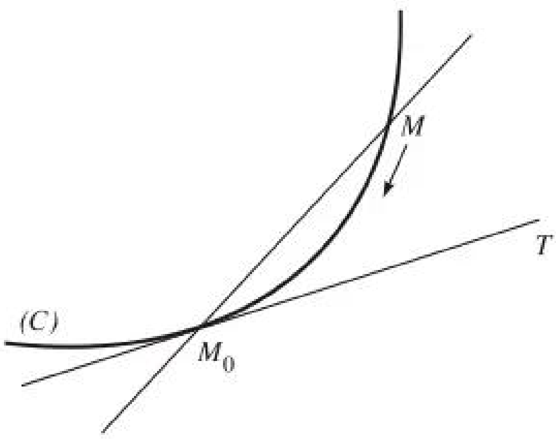
$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2), \tag{3}$$

mà không chứng minh công thức tính đạo hàm của hàm số đó cho trường hợp n nguyên âm vì học sinh chưa học khái niệm hàm số luỹ thừa với số mũ nguyên âm.

5) Để giảm nhẹ kiến thức, chương trình không yêu cầu xây dựng các khái niệm đạo hàm một bên và đạo hàm trên một đoạn. Mặt khác, SGK không nhấn mạnh "Quan hệ giữa sự tồn tại đạo hàm và tính liên tục của hàm số tại một điểm" mà chỉ nêu tính chất "Hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại điểm đó" như là một nhận xét mà thôi ; điều đó không ảnh hưởng gì lớn đến các nội dung khác của Giải tích trong chương trình THPT.

6) Điều đáng lưu ý trong §1 là sự thay đổi cách định nghĩa khái niệm tiếp tuyến.

6.1. SGK 2000 đã định nghĩa : "Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần đến điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại M_0" (h. 5.1).



Hình 5.1

Định nghĩa này tuy có vẻ trực giác nhưng lại rất mơ hồ, bởi lẽ ta chưa có khái niệm về *vị trí giới hạn của một đường thẳng* khi một điểm chuyển động đến một vị trí nào đó.

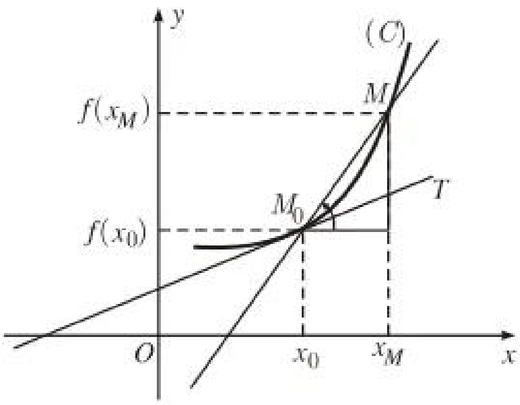
Trong SGK *Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, các tác giả đã cố gắng làm rõ hơn khái niệm "*vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M của một đường cong khi điểm M chuyển động trên đường cong đó dần đến M_0*" thông qua khái niệm giới hạn mà học sinh đã được học ở chương IV. Cụ thể, "*Vị trí giới hạn*" của cát tuyến M_0M khi điểm M chuyển động trên (C) dần đến M_0 là đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc là $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$, trong đó k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M.

Từ đó, ta định nghĩa rằng M_0T là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0.

6.2. Theo định nghĩa đó, điều kiện cần và đủ để đường cong (C) có tiếp tuyến tại điểm M_0 là sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$.

Mặt khác, do $k_M = \dfrac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0}$ (h. 5.2) nên sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$ cũng chính là sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x_M \to x_0} \dfrac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0}$, tức là sự tồn tại của đạo hàm $f'(x_0)$.

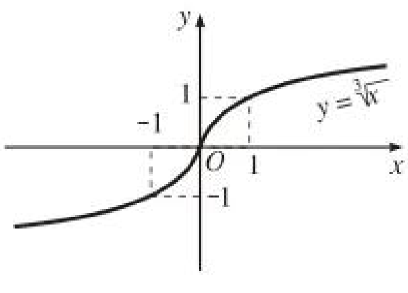
Như vậy, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x_0)$ tại x_0 khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0\,;f(x_0))$.



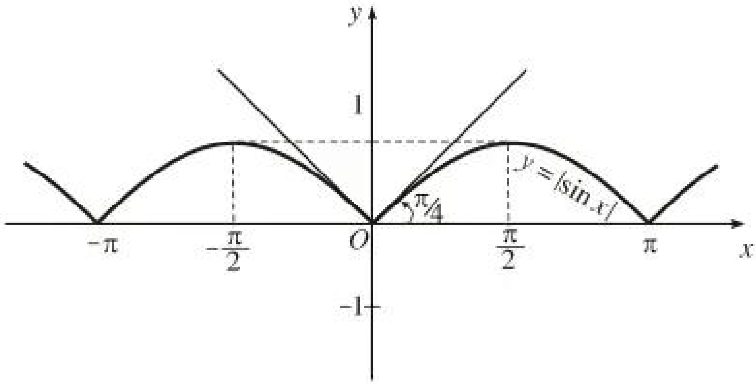
Hình 5.2

6.3. Nếu tại điểm x_0 hàm số f không có đạo hàm thì đương nhiên ta sẽ không xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(x_0\,;f(x_0))$.

Chẳng hạn, không xét tiếp tuyến của đồ thị các hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ (h. 5.3) và $y = |\sin x|$ (h. 5.4) tại điểm (0 ; 0) (vì hai hàm số này không có đạo hàm tại điểm (0 ; 0)).

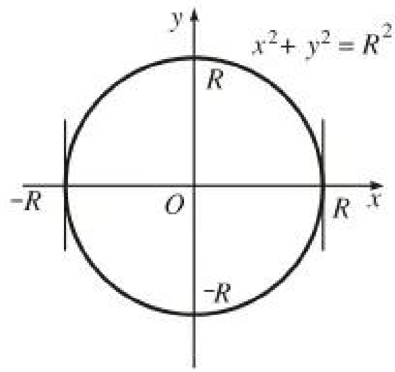


Hình 5.3



Hình 5.4

Đối với đường tròn $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ ta không xét các tiếp tuyến tại hai điểm $(-R\ ;\ 0)$ và $(R\ ;\ 0)$ (h. 5.5). Tuy nhiên ta có thể xét tiếp tuyến tại các điểm còn lại bằng cách khảo sát một trong hai hàm số $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (ứng với nửa đường tròn phía trên trục hoành) và $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (ứng với nửa đường tròn ở phía dưới trục hoành). Trong trường hợp đó, dễ chứng minh rằng tiếp tuyến đó trùng với tiếp tuyến theo định nghĩa của hình học sơ cấp.



Hình 5.5

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 3 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Mục 1 và mục 2.

Tiết 2. Mục 3 và 4.

Tiết 3. Mục 5.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Giúp học sinh biết cách tính Δy.

Đáp số. $\Delta y = \Delta x(\Delta x - 4)$.

H2 *Mục đích.* Giúp học sinh ghi nhớ cách lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.

Đáp số. $y = 4x - 4$.

H3 *Mục đích.* Củng cố ý nghĩa cơ học của đạo hàm.

Trả lời. (C).

H4 *Mục đích.* Củng cố cách tính đạo hàm bằng định nghĩa, đồng thời chứng minh hai kết luận đầu của định lí ngay sau đó.

Chứng minh. Giáo viên tự làm.

H5 *Mục đích.* Giúp học sinh vận dụng được định lí đã học, đồng thời nắm vững khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Đáp số. a) $f'(-1) = -10$, $f'(1) = 10$; b) $f'(-1)$ không tồn tại, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) 3 ; b) –0,19.

2. a) 2 ; b) 5.

3. a) a ; b) ax_0.

4. a) 5 ; 4,1 và 4,01. b) 4.

5. a) $y = 3x + 2$; b) $y = 4(3x - 4)$; c) $y = 3x \pm 2$.

6. a) 49,49 m/s ; 49,049 m/s và ≈ 49,005 m/s ; b) 49 m/s.

7. $f'(x) = 5x^4$; $f'(-1) = 5$; $f'(-2) = 80$; $f'(2) = 80$.

8. a) $y' = 2ax$.

b) $y' = 3x^2$.

Chú ý. Giải bài tập 8 bằng cách áp dụng định nghĩa đạo hàm của hàm số trên một khoảng (lúc này học sinh chưa học đến quy tắc tính đạo hàm).

9. a) $\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$ với $x < 3$.

Gợi ý. Áp dụng định nghĩa đạo hàm của hàm số trên J.