§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Hiểu cách chứng minh các quy tắc tính đạo hàm của tổng và tích các hàm số ;

– Nhớ hai bảng tóm tắt về đạo hàm của một số hàm số thường gặp và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh vận dụng thành thạo các quy tắc tính đạo hàm và hai công thức tính đạo hàm của hàm số hợp $y = u^n(x)$ và $y = \sqrt{u(x)}$.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Để giảm nhẹ kiến thức, các tác giả không đưa vào công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, không yêu cầu chứng minh các công thức tính đạo hàm của một thương hai hàm số và đạo hàm của hàm số hợp.

• Khi chứng minh quy tắc tính đạo hàm của $y = f(x) = u(x).v(x)$, các tác giả đã tính Δy theo định nghĩa (tại điểm x tuỳ ý thuộc J và ứng với Δx) như sau :

$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, suy ra $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$;

$\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$, suy ra $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$. Do đó

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x).v(x + \Delta x) - u(x).v(x)$$

$$= [u(x) + \Delta u].[v(x) + \Delta v] - u(x).v(x). \qquad (1)$$

(Trong SGK 2000 đã công nhận kết quả (1)).

Khi chứng minh các quy tắc tính đạo hàm của tổng các hàm số và của thương hai hàm số, ta cũng lập luận tương tự.

• Chú ý rằng việc chứng minh đạo hàm của thương hai hàm số như sau là không chính xác :

Vì $y = \dfrac{u}{v}$ (theo giả thiết các hàm số u và v có đạo hàm với $v \neq 0$) nên

$$u = y.v.$$

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của một tích, ta có

$$u' = y'v + yv' \Leftrightarrow y'v = u' - \frac{u}{v}v' \Leftrightarrow y'v = \frac{u'v - uv'}{v} \Leftrightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Cách chứng minh này không chính xác ở chỗ : ta chưa chứng minh được hàm số $y = \dfrac{u}{v}$ có đạo hàm nên chưa thể áp dụng được quy tắc tính đạo hàm của tích $y.v$ và do đó chưa viết được $u' = y'v + yv'$.

• Về hàm số hợp và đạo hàm của hàm số hợp :

Một cách chính xác, khái niệm hàm số hợp phải được định nghĩa như là tích của hai ánh xạ. Cụ thể, cho hàm số $u : D \to \mathbb{R}$ và $f : D_f \to \mathbb{R}$ sao cho $u(D) \subset D_f$. Khi đó hàm số $g : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = f[u(x)]$ gọi là hàm số hợp của hàm số f và hàm số u, kí hiệu là $g = f \circ u$. Như vậy, ta có (xem thêm phần bổ sung kiến thức):

$$g(x) = (f \circ u)(x) = f[u(x)]$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & D_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Rõ ràng định nghĩa như trên là rất khó hiểu đối với học sinh. Do đó các tác giả đã lựa chọn giải pháp có tính sư phạm là :

– Chỉ xét các hàm số cho bởi biểu thức.

– Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó hàm số hợp của hai hàm số này là hàm số cho bởi biểu thức $g(x)$, trong đó $g(x)$ có được bằng cách thay thế biến u trong $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$.

– Tập xác định của hàm số hợp $y = g(x)$ nói trên được hiểu như đã quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi biểu thức.

Với tinh thần đó các tác giả đã giới thiệu khái niệm hàm số hợp thông qua một ví dụ cụ thể : Cho các hàm số $f(u) = u^3$ và $u(x) = x^2 + 3x + 1$, khi thay u trong biểu thức u^3 bởi biểu thức $u(x)$, ta được hàm số hợp $g(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$. Sau đó khái quát hoá để được khái niệm hàm số hợp (định nghĩa này chỉ phù hợp với các hàm số cho bằng biểu thức) :

Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Thay biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$, ta được biểu thức $f[u(x)]$. Khi đó hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f[u(x)]$ gọi là hàm số hợp của hai hàm số f và u ; hàm số u gọi là hàm số trung gian.

Do việc chứng minh quy tắc tìm đạo hàm của hàm số hợp nằm ngoài chương trình THPT nên SGK đã thừa nhận công thức

$$g'(x) = \left\{f[u(x)]\right\}' = f'[u(x)].\, u'(x), \text{ (viết gọn là } g_x' = f_u'.\, u_x'). \qquad (2)$$

Trong thực hành, học sinh cần lưu ý hai dạng đặc biệt của hàm số hợp là

1) $y = [u(x)]^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) có đạo hàm là $y' = n[u(x)]^{n-1}.\, u'(x)$, hay viết tắt là $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$. Để đơn giản, $[u(x)]^n$ trong SGK được viết là $u^n(x)$.

2) $y = \sqrt{u(x)}$ ($u(x) > 0$) có đạo hàm là $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x)$, hay viết tắt là $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$.

Chứng minh 2)

Nếu đặt $y = f(u) = \sqrt{u}$, ở đó $u = u(x)$ thì ta có hàm số hợp

$$y = g(x) = f[u(x)] = \sqrt{u(x)}.$$

Áp dụng định lí 4, ta có

$$g'(x) = f'[u(x)].u'(x) \text{ hay} \left[\sqrt{u(x)}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x).$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 3 tiết với nội dung giảng dạy như sau :

Tiết 1 và 2. Mục 1, mục 2 và mục 3 ;

Tiết 3. Mục 4.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Các hoạt động **H1**, **H2**, **H3** và **H4** nhằm giúp học sinh vận dụng thành thạo quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích và thương các hàm số, đồng thời ôn tập được các công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp.

H1 a) 7 ;

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 + \frac{-1}{x^2+1} \qquad \text{hay} \qquad g(x) = 1 + f(x).$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $g'(x) = f'(x)$.

Chú ý

1) Ở đây học sinh chưa học đạo hàm của thương hai hàm số nên phải giả thiết các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm và không được sử dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương để chứng minh rằng $f'(x) = g'(x)$.

2) Trong **H1** phần b), ta đã sử dụng một tính chất hiển nhiên là nếu hai hàm số sai khác nhau một hằng số trên một khoảng thì đạo hàm của chúng (nếu có) là bằng nhau trên khoảng đó.

H2 Sai, vì đã vận dụng sai công thức tính đạo hàm của một tích hai hàm số.

H3 a) Ta có $(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w'$

$$= (u'v + uv')w + uvw'$$
$$= u'vw + uv'w + uvw'.$$

b) *Áp dụng.* $y' = -x(4x^2 + 3x - 4)$.

H4 a) Với $u = 1$ và $v = x$, thay vào công thức trong định lí 3 ta được điều phải chứng minh.

b) Tương tự như a) với $u = 1$ và $v = v(x)$ thì ta được điều phải chứng minh.

H5 *Mục đích.* Giúp học sinh làm quen với quy tắc tính đạo hàm của thương.

Trả lời. (C) : $y' = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$.

H6 *Mục đích.* Củng cố khái niệm hàm số hợp.

Trả lời. $f[u(x)] = \sqrt{x-1}$, xác định trên nửa khoảng $[1 ; +\infty)$.

H7 *Mục đích.* Giúp học sinh suy ra hệ quả 2.

Trả lời. a) $y = \sqrt{u(x)}$ là hàm số hợp của hàm số $f(u) = \sqrt{u}$ và hàm số trung gian $u = u(x)$.

b) Dễ thấy $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ nên $f'[u(x)] = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$. Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = f'(u).u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}u'(x)$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

16. a) -1 ; b) 10 ; c) 8.

17. a) $5x^4 - 12x^2 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; b) $-2x^3 + 2x - \dfrac{1}{3}$;

c) $x^3 - x^2 + x - 1$; d) $\dfrac{a}{a+b}$.

18. a) $2x(x^6 + 1)(7x^6 + 1)$.

Chú ý. Chưa được phép sử dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, vì đến lúc này học sinh chưa học đến quy tắc đó.

Trong trường hợp này, ta viết $(x^7 + x)^2 = (x^7 + x)(x^7 + x)$, rồi tính đạo hàm của một tích hai hàm số.

Hoặc viết $(x^7 + x)^2 = x^{14} + 2x^8 + x^2$, rồi tính đạo hàm của một tổng các hàm số và rút gọn.

b) $4x(-3x^2 + 1)$; c) $\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$;

d) $\dfrac{-5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$; e) $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; f) $2(9x^2 + x - 1)$.

19. a) $32(x - x^2)^{31}(1 - 2x)$; b) $-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$;

c) $\dfrac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$; d) $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

20. Vì $f'(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ nên ta cần giải bất phương trình $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \le \sqrt{x^2 - 2x}$.

Ta có

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \le \sqrt{x^2 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ hoặc } x > 2 \\ x - 1 \le x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ hoặc } x > 2 \\ x \le \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x \ge \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty ; 0) \cup \left[\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}; + \infty\right)$.