§2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm được định nghĩa dãy số có giới hạn là một số thực L và các định lí về giới hạn hữu hạn ;

– Hiểu cách lập công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết áp dụng định nghĩa và các định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số để tìm giới hạn của một số dãy số và biết tìm tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn cho trước.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Trong sách giáo khoa, các tác giả đã làm đúng theo hướng dẫn của chương trình Đại số và Giải tích 11. Sách đã dành một tiết để giới thiệu dãy số có giới hạn 0, sau đó định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn qua dãy số có giới hạn 0. Cách trình bày này tuy có phần dài dòng nhưng nó giúp học sinh tiếp nhận khái niệm giới hạn một cách thuận lợi hơn. Đối với những người mới làm quen với lí thuyết giới hạn, khái niệm giới hạn 0 dễ hình dung hơn. Ngoài ra, sau bài đầu, học sinh chủ yếu chỉ sử dụng một số dãy số có giới hạn 0 đã biết và hầu như không phải đụng chạm đến khái niệm dãy số có giới hạn 0 nữa.

Cách giải ví dụ 5 trong bài là tương đối khó. Nên thông qua ví dụ 4, hướng dẫn cho học sinh giải ví dụ 5.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết hoạt động **H2** ;

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Hoạt động này gồm hai ví dụ tìm giới hạn của dãy số bằng cách áp dụng định nghĩa.

Có thể nêu nhận xét :

Nếu $u_n = L + v_n$, *trong đó L là một hằng số và* $\lim v_n = 0$ *thì* $\lim u_n = L$.

H2 Hoạt động này nhằm giúp học sinh vận dụng định lí 1. Giải tương tự như ví dụ 3 vừa nêu ở trên.

Giải. Ta có $\dfrac{27n^2 - n}{n^2} = 27 - \dfrac{1}{n}$ với mọi n.

Vì $\lim\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ nên theo nhận xét trên, ta có $\lim\dfrac{27n^2 - n}{n^2} = 27$.

Do đó, theo định lí 1, ta có $\lim\sqrt[3]{\dfrac{27n^2 - n}{n^2}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

H3 Giải tương tự như ví dụ 5 ; $\lim u_n = 0$.

H4 Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $q = \dfrac{1}{2}$, ta được

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Nhận xét. Công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là một kết quả quan trọng của lí thuyết giới hạn. Đó là tổng của một chuỗi số đơn giản thường được sử dụng khi nghiên cứu chuỗi số. Minh hoạ hình học kết quả này trong *Bài đọc thêm* không những giúp học sinh đoán nhận được kết quả mà còn giúp các em thấy được ý nghĩa của một tổng vô hạn.

H5 Trước đây ta đã biết một số hữu tỉ cho bởi một phân số có thể biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn. Nhờ công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn ta chứng minh được rằng điều ngược lại cũng đúng.

Hoạt động này được giải tương tự như ví dụ 6.

$$\begin{aligned} 0{,}313131\ldots &= \frac{31}{100} + \frac{31}{100}.\frac{1}{100} + \frac{31}{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \ldots \\ &= \frac{31}{100}.\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{31}{99}. \end{aligned}$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

5. Áp dụng định nghĩa dãy số có giới hạn là số thực L.

a) 2 ; b) -1 ; c) 1 ; d) 1. *Gợi ý* . $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$.

6. Giải tương tự như ví dụ 5.

a) $\frac{1}{2}$; b) 0 ; c) $u_n = \dfrac{n\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{1 - 3n^2} = \dfrac{\frac{1}{n}\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2} - 3}$.

Vì $\lim \frac{1}{n}\sqrt{2 - \frac{1}{n}} = 0$ và $\lim\left(\frac{1}{n^2} - 3\right) = -3 \neq 0$ nên $\lim u_n = 0$.

d) Chia tử và mẫu của phân thức cho 4^n, ta được

$$u_n = \frac{1}{2.\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}.$$

Vì $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 1$.

7. a) Với mọi n, ta có

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{4} = \frac{u_n}{5} + 3 - \frac{15}{4} = \frac{u_n}{5} - \frac{3}{4}.$$

Thay $u_n = v_n + \frac{15}{4}$ vào đẳng thức trên, ta được

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}\left(v_n + \frac{15}{4}\right) - \frac{3}{4}, \text{ hay } v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n \text{ với mọi } n.$$

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{5}$.

b) Từ đó ta có $\lim v_n = 0$ và $\lim u_n = \frac{15}{4}$.

8. a) $p_1 = \frac{3a}{2}$; $p_2 = \frac{3a}{2^2}$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $p_n = \frac{3a}{2^n}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ là $S_1 = \dfrac{S}{4}$.

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ là $S_n = \dfrac{S}{4^n} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Do đó $\lim p_n = 0$ và $\lim S_n = 0$.

b) $p_1 + p_2 + p_3 + ... = \dfrac{p_1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2p_1 = 3a$,

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... = \frac{S_1}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{4S_1}{3} = \frac{S}{3} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

9. a) $0,444... = \dfrac{4}{9}$; b) $0,2121... = \dfrac{21}{99} = \dfrac{7}{33}$;

c) $0,32111... = \dfrac{32}{100} + \dfrac{1}{1000} + \dfrac{1}{1000}.\left(\dfrac{1}{10}\right) + \dfrac{1}{1000}.\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 + ...$

$$= \frac{32}{100} + \frac{1}{1000}.\frac{1}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{32}{100} + \frac{1}{900} = \frac{289}{900}.$$

10. a) $p_n = \pi R$ với mọi n ; $S_n = \dfrac{\pi R^2}{2}.\dfrac{1}{2^n}$ với mọi n.

b) $\lim p_n = \pi R$ và $\lim S_n = 0$.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Chứng minh định lí 2

Dựa vào định nghĩa giới hạn hữu hạn trong sách giáo khoa, có thể chứng minh được định lí 2.

ĐỊNH LÍ 2. *Giả sử* $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ *và* c *là một hằng số. Khi đó*

$$\lim (u_n + v_n) = L + M, \qquad \lim (cu_n) = cL,$$

$$\lim (u_n - v_n) = L - M, \qquad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0\text{)}.$$

$$\lim (u_nv_n) = LM,$$

Chứng minh. Ta có $u_n = L + a_n$, $v_n = M + b_n$ với mọi n, trong đó (a_n) và (b_n) là hai dãy số có giới hạn 0. Do đó, với mọi n

$$u_n + v_n = L + M + a_n + b_n.$$

Theo định lí trong phần *Bổ sung kiến thức* của §1, ta có $\lim(a_n + b_n) = 0$. Từ đó suy ra

$$\lim(u_n + v_n) = L + M.$$

Bây giờ, ta chứng minh $\lim(u_nv_n) = LM$. Thật vậy, với mọi n,

$$u_nv_n = (L + a_n)(M + b_n) = LM + Ma_n + Lb_n + a_nb_n.$$

Theo định lí trong phần *Bổ sung kiến thức* của §1, ta có $\lim(Ma_n) = 0$ và $\lim(Lb_n) = 0$.

Vì $\lim a_n = 0$ nên $|a_n| < 1$ với n đủ lớn. Do đó

$|a_nb_n| \le |b_n|$ với n đủ lớn.

Từ đó suy ra $\lim(a_nb_n) = 0$.

Do đó $\lim(Ma_n + Lb_n + a_nb_n) = 0$ và $\lim(u_nv_n) = LM$.

Đặc biệt, ta có $\lim(cu_n) = cL$.

Cuối cùng ta chứng minh $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$.

Thật vậy, ta có

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{M}\right| = \frac{|Mu_n - Lv_n|}{|M||v_n|}.$$

Vì $\lim|v_n| = |M| > 0$ nên với n đủ lớn, ta có $|v_n| \ge \frac{|M|}{2}$. Do đó

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{M}\right| \le \frac{2}{M^2}|Mu_n - Lv_n| \text{ với } n \text{ đủ lớn.}$$

Vì $\lim|Mu_n - Lv_n| = |ML - LM| = 0$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra

$$\lim\left(\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{M}\right) = 0, \text{ tức là } \lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}.$$