§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Hiểu rõ thế nào là một hoán vị của một tập hợp có n phần tử. Hai hoán vị khác nhau có nghĩa là gì ?

– Hiểu rõ thế nào là một chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử. Hai chỉnh hợp chập k khác nhau có nghĩa là gì ?

– Hiểu rõ thế nào là một tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử. Hai tổ hợp chập k khác nhau có nghĩa là gì ?

– Nhớ các công thức tính số các hoán vị, số các chỉnh hợp chập k và số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết tính số hoán vị, số chỉnh hợp chập k, số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ;

– Biết được khi nào dùng tổ hợp, khi nào dùng chỉnh hợp trong các bài toán đếm ;

– Biết phối hợp sử dụng các kiến thức về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp để giải các bài toán đếm tương đối đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Khi định nghĩa chỉnh hợp, người ta chỉ xét k là số nguyên dương. Việc xét $k = 0$ là vô nghĩa. Tuy nhiên, để công thức $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ đúng cho cả $k = 0$ người ta quy ước $\mathrm{A}_n^0 = 1$.

Trong thực hành nên dùng công thức $\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Công thức này chỉ đúng với k là số nguyên dương.

Giáo viên có thể gợi ý cho học sinh cách nhớ công thức C_n^k và A_n^k như sau : Bắt đầu từ số n viết liên tiếp k số $n, n-1, n-2, \ldots, n-k+1$ rồi nhân chúng với nhau thì được A_n^k. Chia A_n^k cho $k!$ ta được C_n^k.

• Khi định nghĩa tổ hợp, người ta chỉ xét k là số nguyên dương. Để công thức $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ đúng cho cả $k = 0$, người ta quy ước $0! = 1$ do đó $\mathrm{C}_n^0 = 1$.

Tuy nhiên, quy ước này cũng hợp lí vì : Mọi tập hợp chỉ có một tập con có 0 phần tử, tức là tập $\varnothing$. Do đó C_n^0 có thể coi là số tập con 0 phần tử của tập n phần tử ($\mathrm{C}_n^0 = 1$).

• Hai tổ hợp khác nhau khi và chỉ khi có một phần tử của tổ hợp này không là phần tử của tổ hợp kia. Hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi : hoặc có một phần tử của chỉnh hợp này không là phần tử của chỉnh hợp kia, hoặc các phần tử của chúng như nhau (đều cùng là các phần tử của một tập A nào đó) nhưng cách xếp thứ tự không giống nhau (tức là chúng là hai hoán vị khác nhau của tập A).

• Định nghĩa chỉnh hợp một cách chặt chẽ về mặt toán học là như sau : Kí hiệu $N_k = \{1, 2, ..., k\}$ là tập hợp k số nguyên dương đầu tiên. Khi đó một chỉnh hợp chập k của A là một đơn ánh f từ N_k vào A. Một cách tương đương, một chỉnh hợp chập k của A là một bộ có thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_k)$ với các phần tử phân biệt $a_1, a_2, ..., a_k$ thuộc A.

Tuy nhiên, với quan điểm trực quan sinh động, tránh kinh viện hàn lâm, ta không nên dùng định nghĩa toán học như trên. Ngoài các ví dụ trong SGK, giáo viên cố gắng lấy thêm các ví dụ thực tiễn khác để học sinh phân biệt được chỉnh hợp và tổ hợp.

• Trong hai tính chất cơ bản về tổ hợp, ở tính chất thứ nhất, k có thể nhận các giá trị $0, 1, 2, ..., n$. Tuy nhiên, ở tính chất thứ hai (hằng đẳng thức Pa-xcan) k chỉ nhận các giá trị nguyên dương $1, 2, ..., n$.

• Trong các sách của một số nước trên thế giới (đặc biệt là ở Anh, Mĩ), số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là $\binom{n}{k}$ cho nên giáo viên cũng cần giới thiệu cho học sinh kí hiệu này.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Thời gian thực hiện bài này dự kiến là 3 tiết, trong đó : tiết đầu dành cho phần Hoán vị ; tiết thứ hai dành cho phần Chỉnh hợp ; tiết thứ ba dành cho phần Tổ hợp.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Mục đích của các hoạt động sau là kiểm tra xem học sinh đã nắm được các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp hay chưa.

H1 Chẳng hạn 8 hoán vị của A là (a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), (c, d, a, b), (c, d, b, a), (b, c, a, d), (b, c, d, a).

Giáo viên có thể tiến hành hoạt động này như sau :

Gọi lên bảng 4 em, mỗi em lần lượt viết hai hoán vị của A. Sau đó hỏi cả lớp : Em nào có thể bổ sung thêm các hoán vị khác ngoài các hoán vị đã viết lên bảng ?

H2 Có thể lập được 5! = 120 số có 5 chữ số khác nhau.

H3 Các chỉnh hợp chập 2 của A là (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b). Có 6 chỉnh hợp tất cả.

H4 Tất cả các tổ hợp chập 3 của A là $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Ở **H3** và **H4** giáo viên có thể gọi hai em lên bảng và thi xem ai liệt kê đầy đủ các chỉnh hợp và tổ hợp trong thời gian ngắn nhất.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

5. Có 5! = 120 khả năng.

6. Có $A_8^3 = 8.7.6 = 336$ kết quả có thể.

7. a) Giả sử $P = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Với mỗi tập con $\{A_i, A_j\}$ $(i \neq j)$ của P, ta tạo được đoạn thẳng A_iA_j. Ngược lại, mỗi đoạn thẳng với hai đầu mút là hai điểm A_i, A_j tương ứng với tập con $\{A_i, A_j\}$. Ở đây ta không quan tâm đến thứ tự hai đầu mút vì đoạn thẳng A_iA_j và đoạn thẳng A_jA_i chỉ là một đoạn thẳng. Vậy số đoạn thẳng mà hai đầu mút là hai điểm thuộc P chính bằng số tổ hợp chập 2 của n phần tử, tức là bằng $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

b) Với mỗi bộ hai điểm có sắp thứ tự $(A_i, A_j)(i \neq j)$, ta tạo được một vectơ $\overrightarrow{A_iA_j}$. Ngược lại, mỗi vectơ $\overrightarrow{A_iA_j}$ ứng với một bộ hai điểm có sắp thứ tự (A_i, A_j), A_i là điểm gốc, A_j là điểm ngọn. Thứ tự hai điểm ở đây là quan trọng vì $\overrightarrow{A_iA_j}$ và $\overrightarrow{A_jA_i}$ là hai vectơ khác nhau. Do đó số vectơ cần tìm bằng số chỉnh hợp chập 2 của n phần tử, tức là bằng $A_n^2 = n(n-1)$.

8. a) Có $C_7^3 = 35$ cách chọn.

b) Có $A_7^3 = 210$ cách chọn.