§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Hiểu phương pháp xây dựng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản (sử dụng đường tròn lượng giác, các trục sin, côsin, tang, côtang và tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác) ;

– Nắm vững công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết vận dụng thành thạo công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản ;

– Biết cách biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản trên đường tròn lượng giác.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Đây là lần đầu tiên học sinh được làm quen với phương trình lượng giác. Đặc điểm của phương trình lượng giác là chúng thường có vô số nghiệm (do tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác). Ta có thể thấy rõ điều đó trong nhận xét tổng quát sau :

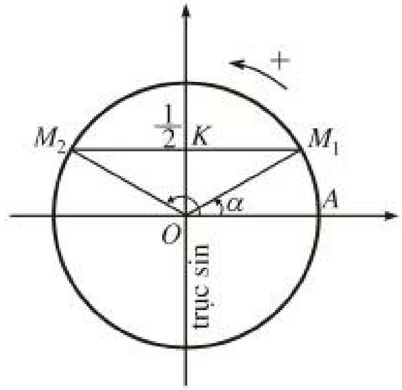
Nếu $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì T và $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì các số $x = x_0 + kT$ $(k \in \mathbb{Z})$ cũng là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Từ nhận xét tổng quát nêu trên, để giải các phương trình dạng $f(x) = 0$, trong đó $y = f(x)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta có thể chỉ cần tìm nghiệm của nó trên một đoạn nào đó có độ dài bằng T rồi suy ra tất cả các nghiệm của phương trình.

Chú ý rằng đối với mỗi phương trình lượng giác $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$ (m là số cho trước), chỉ cần biết một nghiệm của nó thì ta biết được mọi nghiệm của nó nhờ "công thức nghiệm".

2. Nhằm giúp học sinh có hình ảnh trực quan khi xây dựng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, SGK đã lựa chọn phương pháp dựa trên định nghĩa các giá trị lượng giác và ý nghĩa hình học của chúng mà học sinh đã được học ở lớp 10. Chẳng hạn, đối với phương trình $\sin x = m$, SGK đã tiến hành 2 bước :

Bước một là tìm các điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $\sin(OA, OM) = m$ (trong SGK chỉ làm với $m = \frac{1}{2}$ để học sinh dễ hiểu (h.1.10)). Bằng cách dựng hình, ta thấy trên đường tròn lượng giác chỉ có hai điểm M_1 và M_2 là có tính chất ấy (đây là hai điểm duy nhất trên đường tròn lượng giác có chung hình chiếu trên trục sin là điểm K thoả mãn $\overline{OK} = m$). Từ đó, ta khẳng định : "Số đo (rađian) của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của phương trình".



Hình 1.10

Bước hai là tìm số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2). Muốn vậy, ta gọi α là số đo rađian của một góc nào đó trong chúng. Khi đó, hoặc là các góc (OA, OM_1) có số đo $\alpha + k2\pi$ và các góc (OA, OM_2) có số đo $\pi - \alpha + k2\pi$, hoặc là các góc (OA, OM_2) có số đo $\alpha + k2\pi$ và các góc (OA, OM_1) có số đo $\pi - \alpha + k2\pi$.

Trên cơ sở đó, ta kết luận rằng $\alpha + k2\pi$ và $\pi - \alpha + k2\pi$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = m$.

Trong chú ý 2) của SGK ta đã nói : Với số m cho trước mà $|m| \leq 1$, phương trình $\sin x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Điều đó được suy ra từ nhận xét sau : Do $|m| \leq 1$ nên đường thẳng vuông góc với trục sin tại K sao cho $\overline{OK} = m$ cắt nửa đường tròn lượng giác trong nửa mặt phẳng $\{(x ; y) \mid x \geq 0\}$ tại đúng một điểm M. Từ đó nói được đến arcsin m. Cũng dễ thấy điều đó bằng cách xét đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Đối với arccos$m$, arctan$m$, arccot$m$ ta cũng có giải thích tương tự.

Từ chú ý 3) trong SGK ta có cách giải đơn giản phương trình dạng $\sin P(x) = \sin Q(x)$ trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là hai biểu thức chứa x cho trước :

Phương trình đó tương đương với $\left[\begin{array}{l} P(x) = Q(x) + k2\pi \\ P(x) = \pi - Q(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Ta cũng có thể giải phương trình dạng $\sin P(x) = \sin Q(x)$ bằng cách sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích và cũng đi đến kết quả như trên (xem bài tập 26).

Đối với các phương trình cơ bản khác, ta cũng làm tương tự.

3. Vì lí do sư phạm SGK không đề cập đến các hàm số lượng giác $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,... Giáo viên nên giới thiệu cho học sinh biết từ "arcsin$m$" có nghĩa là cung có sin bằng m,... nhưng không để học sinh lạm dụng các kí hiệu arcsin$m$, arccos$m$,... trong việc viết các nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản.

Lưu ý rằng máy tính bỏ túi không có phím $\cot^{-1}$ (tức là arccot) do đó để tìm arccot$m$, ta có thể dùng công thức

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}, \ \underset{(m \neq 0)}{\operatorname{arccot} m} = \begin{cases} \arctan\dfrac{1}{m} & \text{nếu } m > 0 \\ \arctan\dfrac{1}{m} + \pi & \text{nếu } m < 0. \end{cases}$$

4. Nói chung, tập nghiệm của một phương trình lượng giác thường là hợp của những tập con mà mỗi tập con ấy gồm các nghiệm được biểu thị bởi một biểu thức có chứa tham số nguyên (thường kí hiệu bởi k) mà ta gọi là một *họ nghiệm* của phương trình. Chẳng hạn, phương trình $\sin x = \sin\alpha$ có hai họ nghiệm là $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi$, điều đó có nghĩa rằng tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\alpha$ là $S = \{\alpha + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Do đó đối với các họ nghiệm khác nhau, ta vẫn có thể dùng chung một kí hiệu tham số k mà không sợ nhầm lẫn.

5. Thông thường, ta dùng từ "**và**" để kết thúc việc *liệt kê các nghiệm* của một phương trình. Chẳng hạn : Phương trình $(x - 1)(x + 2) = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ **và** $x = -2$. Tương tự đối với phương trình lượng giác, ta cũng dùng từ "**và**" để kết thúc việc liệt kê các họ nghiệm của nó. Ví dụ, ta viết : Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ **và** $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, mặc dù khi giải phương trình, ta vẫn viết :

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$$

6. Khái niệm *số họ nghiệm* của một phương trình lượng giác là một *khái niệm mơ hồ*. Khi cần thiết, ta có thể tách một họ nghiệm nào đó thành nhiều họ nghiệm khác nhau hoặc ngược lại, có thể ghép nhiều họ nghiệm lại thành một họ nghiệm. Ví dụ :

– Họ $x = k\pi$ có thể tách ra thành hai họ : $x = (2m + 1)\pi$ và $x = 2m\pi$ (chia ra theo tính chẵn – lẻ của k) ; họ $x = k\pi$ cũng có thể tách ra thành ba họ : $x = 3m\pi$, $x = (3m + 1)\pi$ và $x = (3m + 2)\pi$; ....

– Hai họ $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ có thể viết gộp lại thành $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Do đó, nói chung ta hết sức tránh đề cập đến *số họ nghiệm* của một phương trình lượng giác và không nêu những câu hỏi như : "Phương trình lượng giác đã cho có bao nhiêu họ nghiệm ?"

Tuy nhiên, đôi khi ta vẫn nói đến các *họ nghiệm* của một phương trình lượng giác, nhất là trong những trường hợp phải tách một thành nhiều họ nghiệm (chẳng hạn, để xét các điều kiện mà nghiệm phải thoả mãn) hay gộp nhiều họ nghiệm lại thành một họ (nhằm đơn giản hoá kết quả), ...

7. Nếu α là một số tuỳ ý cho trước mà $\tan\alpha$ xác định thì phương trình $\tan x = \tan\alpha$ có nghiệm là $x = \alpha + k\pi$. Kết luận đó bao hàm cả khẳng định rằng các số $x = \alpha + k\pi$ thoả mãn điều kiện $\cos x \neq 0$ mà không cần thử lại. Nhưng đối với các phương trình dạng $\tan P(x) = \tan Q(x)$ thì vấn đề không đơn giản như vậy, ta phải chú ý đến điều kiện $\cos P(x) \neq 0$, $\cos Q(x) \neq 0$. Chẳng hạn, xét phương trình $\tan 2x = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ thì với điều kiện $\cos 2x \neq 0$ và $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$, phương trình đã cho được thoả mãn khi $2x = x + \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ tức là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, nhưng các số $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ không thoả mãn điều kiện $\cos 2x \neq 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Tương tự, với phương trình $\cot P(x) = \cot Q(x)$ ta phải để ý đến điều kiện $\sin P(x).\sin Q(x) \neq 0$.

8. Bài toán tìm số đo độ x của góc lượng giác sao cho sin của góc lượng giác có số đo độ $x + 20^{\circ}$ bằng 0,5 được đưa về việc giải phương trình $\sin(x + 20^{\circ}) = 0,5$ mà ta cũng gọi một cách lạm dụng là phương trình lượng giác. Ở nhiều nước, để đỡ gây hiểu nhầm người ta dùng kí hiệu θ chẳng hạn thay cho chữ x và viết phương trình trên là $\sin(\theta + 20^{\circ}) = 0,5$ với ý nhắc nhở rằng θ luôn là số đo độ của góc lượng giác (còn chữ x vẫn được dùng để chỉ số đo rađian của góc lượng giác).

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến thực hiện trong 3 tiết học. Tiết thứ nhất dành cho tiểu mục 1 (phương trình $\sin x = m$). Tiết thứ hai dành cho tiểu mục 2 (phương trình $\cos x = m$) và tiểu mục 3 (phương trình $\tan x = m$). Nội dung còn lại kết hợp với việc hướng dẫn học sinh giải một số bài tập đơn giản được thực hiện ở tiết cuối cùng.

*** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Để đỡ mất thời gian trên lớp, giáo viên nên phóng to các hình vẽ trong SGK, để có thể treo lên cho cả lớp nhìn rõ. Nếu có điều kiện thì nên dùng máy chiếu và máy tính với các phần mềm thích hợp.

*** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Bước đầu, học sinh tự tìm tòi cách tìm nghiệm của phương trình (dựa vào đường tròn lượng giác hoặc suy ra từ hệ thức quen thuộc $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$). Giáo viên cho học sinh tìm ra nhiều hơn một nghiệm, rồi đặt vấn đề làm thế nào tìm được tất cả các nghiệm của phương trình.

Trả lời. Chẳng hạn, $x = \frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6}$.

H2 *Mục đích.* Khắc sâu công thức (Ia).

Giải. Do $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi. \end{array}\right.$$

H3 *Mục đích.* Giúp học sinh hiểu ý nghĩa hình học các nghiệm của một phương trình lượng giác.

Trả lời. Đó là 6 điểm trên đường thẳng $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ có hoành độ thuộc tập hợp

$$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 4\pi, \frac{3\pi}{4} + 4\pi\right\}.$$

H4 *Mục đích.* Sử dụng chú ý 3) để giải phương trình $\sin P(x) = \sin Q(x)$.

Giải. $\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + k2\pi, \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$

H5 *Mục đích.* Luyện kĩ năng vận dụng công thức (IIa).

Giải. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

H6 *Mục đích.* Sử dụng chú ý 3) để giải phương trình $\cos P(x) = \cos Q(x)$.

Giải phương trình $\cos(2x + 1) = \cos(2x - 1)$:

$$\cos(2x + 1) = \cos(2x - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 2x - 1 + k2\pi \\ 2x + 1 = -(2x - 1) + k2\pi \end{array}\right.$$

Dễ thấy phương trình $2x + 1 = 2x - 1 + k2\pi$ vô nghiệm, còn

$$2x + 1 = -(2x - 1) + k2\pi \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}.$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

H7 *Mục đích.* Sử dụng chú ý 2) để giải phương trình $\tan P(x) = \tan Q(x)$.

Giải phương trình $\tan 2x = \tan x$:

Với điều kiện $\cos 2x \cos x \neq 0$ ta có : $\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$.

Rõ ràng các giá trị đó của x thoả mãn điều kiện $\cos 2x \cos x \neq 0$. Vậy các nghiệm của phương trình là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

H8 *Mục đích.* Khắc sâu và luyện kĩ năng vận dụng công thức (IVa).

Giải

$$\cot\left(\frac{2x+1}{6}\right) = \tan\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cot\left(\frac{2x+1}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3\pi - 2 + 6k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi - 3}{2} + k3\pi.$$

H9 *Mục đích.* Tạo lập thói quen khi viết công thức nghiệm với số đo độ.

Giải

1) $\cos(3x - 15^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(3x - 15^o) = \cos 135^o$

$\Leftrightarrow 3x - 15^o = \pm 135^o + k360^o \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 50^o + k120^o, \\ x = -40^o + k120^o. \end{array}\right.$

2) $\tan 5x = \tan 25^o \Leftrightarrow 5x = 25^o + k180^o \Leftrightarrow x = 5^o + k36^o.$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

14. a) $x = \dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{\pi}{2}$.

b) Vì $-\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ nên

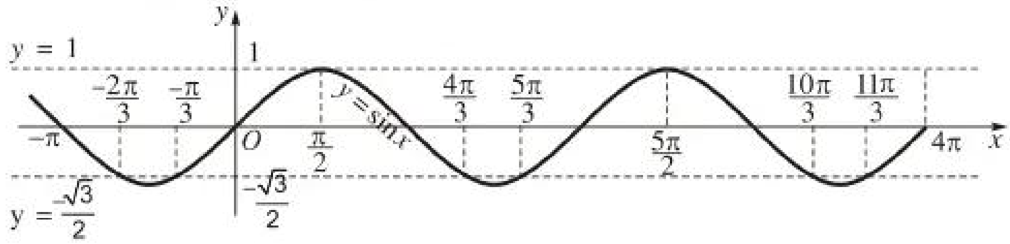
$$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \dfrac{x+\pi}{5} = \pi + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11\pi}{6} + k10\pi, \\ x = \dfrac{29\pi}{6} + k10\pi. \end{array}\right.$$

c) $x = \pm 2\sqrt{2} + k4\pi.$

d) Vì $0 < \dfrac{2}{5} < 1$ nên có số α sao cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$. Do đó

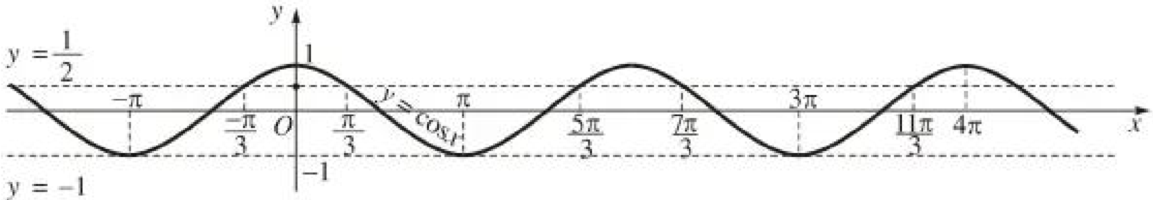
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha - \frac{\pi}{18} + k2\pi.$$

15. a) 1) và 2) xét trên khoảng $(-\pi\ ; 4\pi)$ (h. 1.11).



Hình 1.11

b) 1) và 2) xét trên khoảng $(-\pi\ ; 4\pi)$ (h. 1.12).



Hình 1.12

16. a) *Cách 1*. Với $0 < x < \pi$, ta có $0 < 2x < 2\pi$. Với điều kiện đó :

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{7\pi}{6} \\ 2x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{12}, \\ x = \dfrac{11\pi}{12}. \end{array}\right.$$

Cách 2. Ta có

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi. \end{array}\right.$$

Xét điều kiện $0 < x < \pi$, ta có

- $0 < -\dfrac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{12} < k < \dfrac{1}{12} + 1$. Chỉ có một giá trị k nguyên thoả mãn điều kiện này là $k = 1$. Vậy trong các giá trị $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$ chỉ có $x = \dfrac{11\pi}{12}$ (ứng với $k = 1$) là thoả mãn điều kiện $0 < x < \pi$.

• Tương tự, trong các giá trị $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ chỉ có $x = \dfrac{7\pi}{12}$ (ứng với $k = 0$) là thoả mãn điều kiện $0 < x < \pi$.

Kết luận. $x = \dfrac{7\pi}{12}$ và $x = \dfrac{11\pi}{12}$.

b) $\cos(x-5) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - 5 = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi. \end{array}\right.$

Ta tìm k để điều kiện $-\pi < x < \pi$ được thoả mãn.

• Xét họ nghiệm thứ nhất :

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -7\pi - 30 < 12k\pi < 5\pi - 30$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} - \frac{30}{12\pi} < k < \frac{5}{12} - \frac{30}{12\pi}.$$

Vì $-1,38 < -\dfrac{7}{12} - \dfrac{30}{12\pi} < \dfrac{5}{12} - \dfrac{30}{12\pi} < -0,37$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $-1,38 < k < -0,37$.

Chỉ có một giá trị k nguyên thoả mãn các điều kiện đó là $k = -1$.

Ta có nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \dfrac{11\pi}{6}$.

• Tương tự, xét họ nghiệm thứ hai :

$-\pi < -\dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -5\pi - 30 < 12k\pi < 7\pi - 30$. Vậy $k = -1$.

Ta có nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \dfrac{13\pi}{6}$.

Kết luận. $x = 5 - \dfrac{11\pi}{6}$ và $x = 5 - \dfrac{13\pi}{6}$.

17. a) Ta phải giải phương trình

$$3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12 = 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Phương trình đó dẫn đến $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=0$, hay $\frac{\pi}{182}(t-80)=k\pi$,

tức là

$$t = 182k + 80 \text{ (với } k \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

Mặt khác, $0 < 182k + 80 \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{80}{182} < k \leq \frac{285}{182} \Leftrightarrow k \in \{0\,;1\}$.

Trả lời. Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 (ứng với $k = 0$) và ngày thứ 262 (ứng với $k = 1$) trong năm.

b) Do $\sin x \geq -1$ với mọi x nên thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Phương trình đó cho ta $\frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là

$$t = 364k - 11 \text{ (với } k \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

Mặt khác, $0 < 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1$ (do k nguyên).

Trả lời. Thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất (9 giờ) khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Tương tự, ta phải giải phương trình

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Trả lời. Thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất (15 giờ) vào ngày thứ 171 trong năm.

18. a) $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}$.

b) $\tan(x - 15^o) = 5 \Leftrightarrow x = a + 15^o + k180^o$, trong đó $\tan a = 5$ (chẳng hạn, có thể chọn $a \approx 78^o41'24''$ nhờ dùng máy tính bỏ túi).

c) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$.

d) $x = -\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

e) $x = -200^{\circ} + k720^{\circ}$.

f) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$.

19. Giáo viên tự vẽ hình và giải.

20. a) $\tan(2x - 15^{\circ}) = 1 \Leftrightarrow 2x = 15^{\circ} + 45^{\circ} + k180^{\circ} \Leftrightarrow x = 30^{\circ} + k90^{\circ}$.

$-180^{\circ} < 30^{\circ} + k90^{\circ} < 90^{\circ} \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{3} + k < 1 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = -150^{\circ}$, $x = -60^{\circ}$ và $x = 30^{\circ}$.

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$.

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{1}{3} \Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = -\frac{4\pi}{9}$ và $x = -\frac{\pi}{9}$.

21. Cả hai bạn đều giải đúng. Hai họ nghiệm chỉ khác nhau về hình thức, thực chất chỉ là một. Thực vậy, họ nghiệm $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ có thể viết lại là $x = \frac{2\pi}{3} - \pi + (k+1)\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi$; đây chính là kết quả mà Phương tìm được.

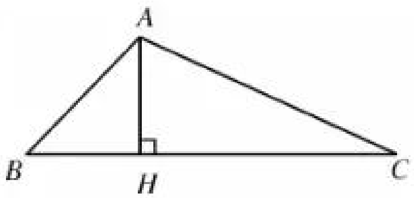
22. Ta xét hai trường hợp :

a) B và C nằm khác phía đối với H (h. 1.13)

Trong tam giác vuông ABH ta có

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

suy ra $\widehat{B} = 45^{\circ}$ (chú ý rằng góc B nhọn).



Hình 1. 13

Trong tam giác vuông ACH ta có $\sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $\widehat{C} \approx 35^o15'52''$.

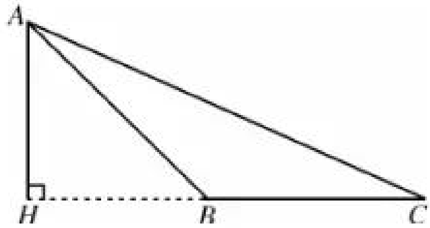
Từ đó $\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 99^o44'8''$.

b) B và C nằm cùng phía đối với H (h. 1.14)

Tương tự như trên, ta có

$\widehat{ABC} = 180^o - \widehat{ABH} = 180^o - 45^o = 135^o$,

$\widehat{C} \approx 35^o15'52''$.



Hình 1. 14

Từ đó $\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 9^o44'8''$.