

§3. CẤP SỐ CỘNG (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

- *Về kiến thức*

Giúp học sinh

- Nắm vững khái niệm cấp số cộng ;
- Nắm được một tính chất đơn giản về ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng ;
- Nắm vững công thức xác định số hạng tổng quát và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.

- *Về kỹ năng*

Giúp học sinh

- Biết dựa vào định nghĩa để nhận biết một cấp số cộng ;

- Biết cách tìm số hạng tổng quát và cách tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng trong các trường hợp không phức tạp ;
- Biết vận dụng các kết quả lí thuyết đã học trong bài để giải quyết các bài toán đơn giản liên quan đến cấp số cộng ở các môn học khác, cũng như trong thực tế cuộc sống.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LUU Ý

- Nhiều tác giả (trong và ngoài nước), khi định nghĩa cấp số cộng có đưa ra ràng buộc khác 0 đối với công sai của cấp số. Với mục đích không gây ra những thay đổi không cần thiết cho quá trình dạy – học, SGK đã định nghĩa cấp số cộng theo quan điểm của SGK 2000.
- Mệnh đề đảo của định lí 1 là một định lí. Tuy nhiên, nhằm tránh cho đại đa số học sinh phổ thông sự “quá tải” về kiến thức, SGK không trình bày định lí này.
- Vì các lí do đã nêu ở phần *Những điều cần lưu ý trong chương*, SGK không trình bày chứng minh của định lí 3. Thay vào đó, SGK trình bày một nhận xét dẫn đến định lí này nhằm giúp học sinh cảm nhận được tính đúng đắn của nó.
- *Đối với các học sinh khá, giỏi*, giáo viên nên nêu và chứng minh cho học sinh định lí đảo của định lí 1.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

* *Dự kiến phân phối thời gian*

Bài này dự kiến được thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Mục 1, mục 2 và một phần của mục 3 (đến hết **H3**) ;

Tiết 2. Nội dung còn lại của bài.

* *Gợi ý về đồ dùng dạy học*

Giáo viên cần chuẩn bị các bảng tóm tắt nội dung của các bài toán ở ví dụ 2 và **H5**.

* **Gợi ý về các hoạt động trên lớp**

- H1** a) Dãy số đã cho là một cấp số cộng ; vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với 3.
b) Dãy số đã cho không là cấp số cộng.

H2 Theo định lí 1, ta có

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) = \frac{1}{2}(-1 + 3) = 1 \text{ và } u_4 = 2u_3 - u_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Chú ý. Sau khi tính được u_2 , có thể tính u_4 bằng cách sử dụng định nghĩa.

H3 Theo định lí 2, ta có $u_{31} = u_1 + 30d = 13 + 30 \cdot (-3) = -77$.

H4 $S_{17} = \frac{17[2u_1 + (17-1)d]}{2} = \frac{17[2 \cdot (-2) + 16 \cdot 2]}{2} = 238$.

H5 Mục đích

- Giúp học sinh rèn luyện khả năng vận dụng kiến thức được học vào việc giải quyết các vấn đề có thể gặp trong thực tế cuộc sống.
- Gây hứng thú học tập cho học sinh

Gợi ý

- Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải quyết vấn đề đã đặt ra bằng cách đặt các câu hỏi gợi ý, dẫn dắt.
- Nếu điều kiện cho phép, giáo viên có thể tổ chức cho học sinh thảo luận theo tổ (nhóm) và yêu cầu đại diện của các tổ (nhóm) trình bày ý kiến của tổ (nhóm) mình.

Giải. Tương tự như ở ví dụ 3, tổng số lương (đơn vị : triệu đồng) mà người kĩ sư được nhận sau n năm làm việc như sau :

Theo phương án 1, ta có

$$T_1 = \frac{n[2 \cdot 36 + (n-1) \cdot 3]}{2} = \frac{3n(n+23)}{2};$$

Theo phương án 2, ta có

$$T_2 = \frac{4n[2 \cdot 7 + (4n-1) \cdot 0,5]}{2} = 2n(2n+13,5).$$

Suy ra $T_1 - T_2 = \frac{5n}{2}(3-n)$.

Từ đó $T_1 - T_2 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 3$ và $T_1 - T_2 < 0 \Leftrightarrow n > 3$.

Vì thế

- Nếu dự định làm việc cho Công ty A không quá 3 năm thì nên kí hợp đồng theo phương án 1 ;
- Nếu dự định làm việc cho Công ty A trên 3 năm thì nên kí hợp đồng theo phương án 2.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

19. a) Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$ với mọi $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$.

b) Ta có $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$ với mọi $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = a$.

20. Đặt $OA_0 = 0$, ta có

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{OA_n^2}{4} - \pi \frac{OA_{n-1}^2}{4} \right) = \frac{\pi}{8} [n^2 - (n-1)^2] = \frac{(2n-1)\pi}{8} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Suy ra $u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+1)\pi}{8} - \frac{(2n-1)\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ với mọi $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = \frac{\pi}{4}$.

21. a) Tăng.

b) Giảm.

22. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$28 = u_1 + u_3 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = 14,$$

$$40 = u_3 + u_5 = 2u_4 \Rightarrow u_4 = 20,$$

$$2u_3 = u_2 + u_4 = 34 \Rightarrow u_3 = 17.$$

Từ đó $u_1 = 28 - u_3 = 11$ và $u_5 = 40 - u_3 = 23$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là : 11, 14, 17, 20, 23.

23. Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có :

$$-52 = u_{20} = u_1 + 19d,$$

$$-145 = u_{51} = u_1 + 50d,$$

Từ đó suy ra $u_1 = 5$ và $d = -3$. Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là $u_n = 5 + (n-1)(-3)$ hay $u_n = -3n + 8$.

24. Theo định lí 2, ta có

$$u_m = u_1 + (m-1)d = u_1 + (k-1)d + (m-k)d = u_k + (m-k)d.$$

$$\text{Áp dụng. } 75 = u_{18} - u_3 = 15d \Rightarrow d = 5.$$

25. Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

$$\text{Ta có } 6 = u_1 - u_3 = u_1 - (u_1 + 2d) = -2d.$$

Suy ra $d = -3$, và do đó $-10 = u_5 = u_1 + 4d = u_1 - 12$, dẫn tới $u_1 = 2$.

$$\text{Vì vậy } u_n = 2 + (n-1).(-3) \text{ hay } u_n = 5 - 3n.$$

26. Ta sẽ chứng minh

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $S_1 = u_1 = \frac{1.(u_1 + u_1)}{2}$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} + u_{k+1} = \frac{k(u_1 + u_{k+1} - d) + 2u_{k+1}}{2} \\ &= \frac{ku_1 + (k+1)u_{k+1} + u_{k+1} - kd}{2} = \frac{ku_1 + (k+1)u_{k+1} + u_1}{2} = \frac{(k+1)(u_1 + u_{k+1})}{2}; \end{aligned}$$

nghĩa là (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho, ta có

$$u_1 = u_2 - d \quad \text{và} \quad u_{23} = u_{22} + d.$$

Do đó, áp dụng định lí 3 cho $n = 23$, ta được

$$S_{23} = \frac{23(u_1 + u_{23})}{2} = \frac{23(u_2 + u_{22})}{2} = \frac{23 \cdot 60}{2} = 23 \cdot 30 = 690.$$

28. Kí hiệu A, B, C là số đo ba góc (tính theo đơn vị độ) của tam giác vuông đã cho. Không mất tổng quát, có thể giả sử $A \leq B \leq C$. Khi đó, từ giả thiết dễ dàng suy ra $C = 90$ (độ) và A, B, C theo thứ tự đó là một cấp số cộng. Gọi d là công sai của cấp số cộng đó, ta có

$$A = C - 2d \quad \text{và} \quad B = C - d.$$

Suy ra $90 = A + B = 2C - 3d = 180 - 3d$. Do đó $d = 30$.

Vì thế $A = 90 - 2 \cdot 30 = 30$ (độ) và $B = 90 - 30 = 60$ (độ).