§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Ghi nhớ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;

– Nhớ các công thức tìm đạo hàm của các hàm số lượng giác cơ bản.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc vận dụng các công thức đã họ để tìm đạo hàm của các hàm số lượng giác thường gặp.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Trước khi phát biểu định lí 1, nên yêu cầu học sinh xem (mà không tính toán) bảng các giá trị của $\dfrac{\sin x}{x}$ ở trong SGK để đi đến nhận xét : *Với x (dương) càng nhỏ thì* $\dfrac{\sin x}{x}$ *càng dần tới* 1. Trong khuôn khổ của chương trình, định lí này không được chứng minh. Tuy nhiên, đối với các học sinh giỏi, nhất là đối với các học sinh chuyên toán, giáo viên cũng có thể hướng dẫn cho học sinh chứng minh định lí này, nhưng trước đó, học sinh phải được trang bị *định lí kẹp* sau đây :

ĐỊNH LÍ. Giả sử $(a\ ;\ b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 ; các hàm số g_1, f và g_2 cùng xác định trên $D = (a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$ sao cho $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ với mọi x thuộc D. Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = L$ (với $L \in \mathbb{R}$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

2) Trong ví dụ minh họa cho định lí 1, ta có kết quả sau :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

Đó chỉ là một trường hợp riêng của định lí :" Nếu hàm số $u = u(x)$ thoả mãn các điều kiện : $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$".

Tất nhiên định lí trên vẫn đúng nếu $u(x) \neq 0$ với mọi x thuộc một khoảng nào đó chứa x_0 sao cho $x \neq x_0$. Tuy nhiên, để đơn giản ta chỉ đưa ra các ví dụ và bài tập với hàm số $u = u(x)$ thoả mãn điều kiện $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$.

3) Có thể chứng minh phần b) của định lí 2 như sau :

Hàm số $y = g(x) = \sin(u(x))$ có thể xem là hàm số hợp của hàm số $f(u) = \sin u$ và hàm số trung gian $u = u(x)$. Chú ý rằng $f'(u) = (\sin u)' = \cos u$.

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta được

$$y' = g'(x) = f'[u(x)]\, u'(x) = [\cos u(x)].\, u'(x),$$

Chứng minh tương tự cho phần b) của các định lí 3, 4 và 5.

Chú ý. Có thể sử dụng định lí 2 để chứng minh các định lí còn lại như sau :

• Chứng minh định lí 3

Ta có

$$(\cos u)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right].\left(\frac{\pi}{2} - u\right)'$$

$$= (\sin u).\,(-u') = (-\sin u).u'.$$

• Chứng minh định lí 4

Ta có

$$(\tan u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{(\sin u)'.\cos u - \sin u(\cos u)'}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{[(\cos u).u']\cos u - \sin u[(-\sin u).u']}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u).u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}.u'.$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1. Mục 1 và 2 ;

Tiết 2. Các mục 3, 4 và mục 5.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Giúp học sinh sử dụng thành thạo công thức $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax} = 1$ (với $a \neq 0$).

Trả lời. Chọn (D). Có thể suy luận như sau

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 3x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos 3x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}.\dfrac{1}{3}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x = \cos 0 = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 3x = \dfrac{1}{3}$.

Các hoạt động **H2**, **H3**, **H5** nhằm mục đích giúp học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc tính đạo hàm của các hàm số lượng giác liên quan đến các hàm số $\sin u$, $\cos u$, $\tan u$ và $\cot u$ (ở đây $u = u(x)$).

H2 *Trả lời.* Chọn (A), $[\sin(\sqrt{x})]' = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

H3 *Trả lời.* Chọn (D), $(\cos^2 x)' = -\sin 2x$.

Gợi ý. Đây là hàm số hợp của hàm số $f(u) = u^2$ và hàm số trung gian $u(x) = \cos x$. Do $f'(u) = 2u$ và $u'(x) = -\sin x$ nên

$$(\cos^2 x)' = f'[u(x)]\,u'(x) = 2\cos x\,(-\sin x).$$

Chú ý. Cũng có thể dùng công thức hạ bậc rồi mới tính đạo hàm :

$$(\cos^2 x)' = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(\cos 2x)' = \frac{1}{2}(-\sin 2x)(2x)' = -\sin 2x.$$

H4 *Mục đích.* Giúp học sinh hiểu cách chứng minh công thức tính đạo hàm của các hàm số $\tan x$ và $\cot x$ dựa vào các công thức tìm đạo hàm của các hàm số $\sin x$ và $\cos x$.

Giải. Với mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

H5 *Trả lời.* a) Chọn (C), $(\tan 2x + \cot 2x)' = 2(\tan^2 2x - \cot^2 2x)$;

b) Chọn (B), $[\cot(\sin 5x)]' = -5[1 + \cot^2(\sin 5x)]\cos 5x$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

28. a) $\dfrac{2}{5}$; b) $\dfrac{1}{2}$;

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} = -1.$$

29. a) $5\cos x + 3\sin x$; b) $(2x-3)\cos(x^2 - 3x + 2)$;

c) $\dfrac{-\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$; d) $2(4\cos 8x - \cos 2x)$;

e) $-\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$; f) $-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

30. *Cách 1* (Tính trực tiếp đạo hàm).

$$y' = 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + 6\sin x\cos^3 x - 6\cos x\sin^3 x$$

$$= 6\sin x\cos x[(\sin^4 x - \cos^4 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)]$$

$$= 3\sin 2x\,[(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)] = 0.$$

Cách 2 (Sử dụng công thức lượng giác, chứng minh rằng hàm số đã cho là hằng số, do đó đạo hàm của nó bằng 0).

Ta có

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x$$

$$\Leftrightarrow\ 1 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Suy ra $y = 1$. Vậy $y' = 0$.

31. a) $\dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$; b) $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}(1 + \cot^2\sqrt{x^2+1})$;

c) $\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\sin^2 2x} = 3\tan^2 x\,(1 + \tan^2 x) - 2(1 + \cot^2 2x)$;

d) $\dfrac{12}{\sin^2 6x}$; e) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}$; f) $\cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

32. a) $y' = 1 + \tan^2 x$. Do đó $y' - y^2 - 1 = (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - 1 = 0$.

b) $y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$.