§3. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm được định nghĩa dãy số có giới hạn là $+\infty$, $-\infty$ và các quy tắc tìm giới hạn vô cực.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh vận dụng được các quy tắc tìm giới hạn vô cực để từ một số giới hạn đơn giản đã biết tìm giới hạn vô cực.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Nên nhấn mạnh các điều sau đây :

• $+\infty$ và $-\infty$ không phải là những số thực. Học sinh dễ hiểu sai $+\infty$ là một số rất lớn. Các ví dụ sau có thể làm cho các em phần nào hiểu rõ hơn khái niệm vô cực :

$$\lim \frac{10^{10}}{n} = 0, \quad \lim (n - 10^{20}) = +\infty.$$

• Giới hạn vô cực và giới hạn hữu hạn có ý nghĩa hoàn toàn khác nhau. Khi n tăng, các điểm biểu diễn (trên trục số) các số hạng của dãy số (u_n) có giới hạn $L \in \mathbb{R}$ chụm lại quanh điểm L, còn các điểm biểu diễn các số hạng của dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) đi xa mãi theo chiều dương (hoặc chiều âm) của trục số vượt qua mọi điểm L (hoặc $-L$) cho trước dù $L > 0$ lớn đến đâu.

• Đừng nghĩ rằng một dãy số không có giới hạn hữu hạn thì có giới hạn vô cực. Chẳng hạn dãy số $((-1)^n)$ không có giới hạn hữu hạn, cũng không có giới hạn vô cực.

• Không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

• Khi giải bài tập, học sinh được quyền sử dụng các khẳng định hiển nhiên sau đây :

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

+ Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n (hoặc kể từ một số hạng nào đó trở đi) và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.

+ Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n (hoặc kể từ một số hạng nào đó trở đi) và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

+ Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$ hoặc $\lim v_n = L \in \mathbb{R}$ thì $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

+ Nếu $\lim u_n = -\infty$ và $\lim v_n = -\infty$ hoặc $\lim v_n = L \in \mathbb{R}$ thì $\lim(u_n + v_n) = -\infty$.

Các điều khẳng định trên suy ra từ định nghĩa giới hạn vô cực.

• Hai khẳng định cuối là những trường hợp đặc biệt của định lí sau đây

ĐỊNH LÍ a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và dãy số (v_n) bị chặn dưới thì

$$\lim(u_n + v_n) = +\infty.$$

b) Nếu $\lim u_n = -\infty$ và dãy số (v_n) bị chặn trên thì

$$\lim(u_n + v_n) = -\infty.$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Có thể áp dụng quy tắc 2 để giải ví dụ 4

$$\frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = \frac{n^3\left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = n.\frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n}}.$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \dfrac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n}} = \dfrac{3}{2} > 0$ nên $\lim \dfrac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = +\infty$.

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Nội dung của bài hơi nhiều. Tuy nhiên sau bài này có hai tiết luyện tập. Nếu thấy khó có thể dạy hết bài trong 1 tiết, giáo viên có thể chuyển phần cuối bài từ *c) Quy tắc 3* sang tiết sau.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Các hoạt động **H1** và **H2** giúp học sinh biết vận dụng các quy tắc tìm giới hạn vô cực. Trước các hoạt động này đã có các ví dụ tương tự.

H1 Giải tương tự như ví dụ 3.

a) $n\sin n - 2n^3 = n^3\left(-2 + \dfrac{\sin n}{n^2}\right)$ với mọi n.

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(-2 + \dfrac{\sin n}{n^2}\right) = -2 < 0$ nên $\lim(n\sin n - 2n^3) = -\infty$.

b) Vì $\lim\left|n\sin n - 2n^3\right| = +\infty$ nên $\lim \dfrac{1}{n\sin n - 2n^3} = 0$.

H2 Giải tương tự như ví dụ 4.

$$\lim \frac{-2n^3 + n}{3n - 2} = -\infty.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

11. a) $-\infty$; b) $+\infty$.

12. a) $-\infty$;

b) $u_n = \dfrac{n^2\sqrt[3]{1 - \dfrac{7}{n^3} - \dfrac{5}{n^5} + \dfrac{8}{n^6}}}{n + 12}$.

Cách 1. Chia tử và mẫu của phân thức cho n^2, ta được

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{1 - \dfrac{7}{n^3} - \dfrac{5}{n^5} + \dfrac{8}{n^6}}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{12}{n^2}}.$$

Vì $\lim \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}} = \sqrt[3]{1} = 1 > 0$, $\lim\left(\frac{1}{n} + \frac{12}{n^2}\right) = 0$

và $\frac{1}{n} + \frac{12}{n^2} > 0$ với mọi n nên $\lim u_n = +\infty$.

Cách 2. Chia tử và mẫu của phân thức cho n, ta được

$$u_n = \frac{n\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{12}{n}}.$$

Vì $\lim n\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}} = +\infty$ và $\lim\left(1 + \frac{12}{n}\right) = 1 > 0$ nên $\lim u_n = +\infty$.

13. a) $+\infty$.

Gợi ý. $2n + \cos n = n\left(2 + \frac{\cos n}{n}\right)$, $\lim n = +\infty$ và $\lim\left(2 + \frac{\cos n}{n}\right) = 2 > 0$.

b) $+\infty$.

14. Vì $q > 1$ nên đặt $p = \frac{1}{q}$, ta được $0 < p < 1$. Do đó $\lim p^n = 0$. Vì $p^n > 0$ với mọi n nên từ đó suy ra $\lim \frac{1}{p^n} = +\infty$, tức là $\lim q^n = +\infty$.

15. a) $\lim u_n = +\infty$. *Gợi ý*. Chia tử và mẫu của phân thức cho 3^n.

b) $u_n = 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]$ với mọi n.

Vì $\lim 3^n = +\infty$ và $\lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -1 < 0$ nên $\lim u_n = -\infty$.