§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

(4 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm vững cách giải một số dạng phương trình lượng giác đơn giản :

– Dạng phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác ;

– Dạng phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$;

– Dạng phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$;

– Một vài phương trình có thể dễ dàng quy về các dạng trên (có thể đòi hỏi một vài điều kiện đơn giản).

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh nhận biết và giải thành thạo các dạng phương trình nêu trong bài.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Bài này chỉ đề cập ba dạng phương trình lượng giác đơn giản là phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác, phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ và phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$. Để giải các phương trình lượng giác có dạng như thế, ta thường dùng phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp sử dụng các công thức biến đổi lượng giác để đưa về các dạng đã biết. Đó là hai phương pháp khá tiêu biểu thường được dùng để giải các phương trình lượng giác.

• Phương pháp đặt ẩn phụ thường dùng để đại số hoá một phương trình lượng giác ; nghĩa là sau khi đặt ẩn phụ, ta được một phương trình đại số đối với ẩn phụ đó. Do đó, phương pháp này không chỉ được dùng để giải phương trình bậc nhất hay bậc hai đối với một hàm số lượng giác mà còn được dùng để giải nhiều phương trình dạng khác nữa (chẳng hạn, phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$, nhưng dạng này không được nêu trong chương trình). Khi giải phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác, việc đặt ẩn phụ là quá hiển nhiên và đơn giản đến mức không cần phải nêu kí hiệu ẩn phụ. Tuy nhiên, bước đầu để giúp học sinh dễ làm quen với việc nhận dạng phương trình, giáo viên vẫn nên đưa ra kí hiệu ẩn phụ (xem ví dụ 2) ; khi đã quen, có thể không cần làm như vậy (xem ví dụ 3).

• Về cách giải phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$, học sinh được học cách biến đổi biểu thức dạng $a\sin x + b\cos x$ thành dạng $C\sin(x + \alpha)$.

SGK trình bày một cách đưa biểu thức $a\sin x + b\cos x$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ về dạng $C\sin(x + \alpha)$, với $C = \sqrt{a^2 + b^2}$, α là số thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Để dễ hình dung số α này, sách có nêu cách dựng điểm $P(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ gắn với đường tròn lượng giác (trục OA là trục hoành) : Khi đó α là số đo của góc lượng giác $(OA ; OP)$ và $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cũng nên để ý rằng nếu biểu thức $a\sin x + b\cos x$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ đưa được về dạng $C\sin(x + \alpha)$ và về dạng $C'\sin(x + \alpha')$ (C, α, C', α' là những hằng số) thì hoặc $C' = C$, $\alpha' = \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; hoặc $C' = -C$, $\alpha' = \alpha + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ta còn có thể trình bày cách giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ theo hướng trên như sau :

Nếu $a \neq 0$ thì ta chia hai vế cho a và chọn β sao cho $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$. Khi đó ta có

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow a\left(\sin x + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos x\right) = c$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta\sin x + \sin\beta\cos x = \frac{c}{a}\cos\beta \Leftrightarrow \sin(x + \beta) = \frac{c}{a}\cos\beta$$

(hoặc nếu $b \neq 0$ thì ta chia hai vế cho b và chọn γ sao cho $\cot\gamma = \dfrac{a}{b}$).

Thực chất hai cách làm trên là như nhau, nhưng có thể dẫn đến các nghiệm có hình thức khác nhau. Giáo viên cần chú ý đặc điểm này để tránh sai sót đáng tiếc nếu chỉ nhìn vào hình thức bài làm.

Ngoài ra còn có cách giải khác là đưa phương trình về phương trình bậc hai đối với $\tan\frac{x}{2}$ hay $\cot\frac{x}{2}$, nhưng vì không muốn đi sâu vào các thủ thuật giải phương trình lượng giác, SGK đã không trình bày cách này.

• Đối với các phương trình chứa ẩn ở mẫu, chỉ yêu cầu học sinh giải được các phương trình đòi hỏi những điều kiện rất đơn giản của ẩn ; không yêu cầu học sinh giải các phương trình chứa hàm số lượng giác trong dấu căn và các phương trình lượng giác có tham số. Nói chung SGK không yêu cầu học sinh giải những phương trình lượng giác phức tạp.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này được thực hiện trong 4 tiết. Hai tiết đầu dạy hai mục 1 và 2 ; còn lại dành cho hai tiết sau. Xen kẽ, giáo viên nên chữa bài tập trên lớp để kịp thời củng cố kiến thức.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Luyện kĩ năng nhận dạng phương trình bậc hai đối với $\cos x$ (chú ý rằng có thể sử dụng định lí Vi-ét để nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai).

Giải

$$4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi.\end{array}\right.$$

H2 *Mục đích.* Nâng cao một bước kĩ năng nhận dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

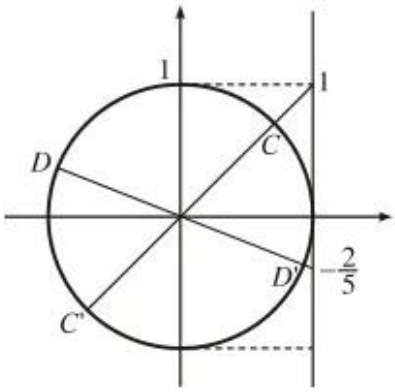
Giải

ĐKXĐ : $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$ (cũng có thể viết $\sin x\cos x \neq 0$ hay $\sin 2x \neq 0$).

Với điều kiện đó ta có $\tan x \neq 0$ và

$$5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 5\tan x - 2\frac{1}{\tan x} - 3 = 0$$



Hình 1.15

$$\Leftrightarrow 5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\dfrac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\\ x = \arctan\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k\pi.\end{array}\right.$$

Hiển nhiên các giá trị tìm được của x thoả mãn ĐKXĐ nên đều là nghiệm của phương trình. Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được các điểm C, C', D, D' (h.1.15).

H3 *Mục đích.* Chuẩn bị cho trình bày cách giải phương trình

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Giải. $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi,\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.\end{array}\right.$$

H4 *Mục đích.* Đưa ra một ứng dụng của việc biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x$ về dạng $C\sin(x + \alpha)$, từ đó thấy được tập giá trị của hàm số $y = a\sin x + b\cos x$ là $[-m\,;\,m]$ với $m = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Trả lời. Do $\sqrt{4 + 5} = 3$ nên $|m| \leq 3$.

H5 *Mục đích.* Luyện kĩ năng giải phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

Giải

Các giá trị của x mà $\sin x = 0$ (tức là $x = k\pi$) không nghiệm đúng phương trình. Do đó chia cả hai vế của (3) cho $\sin^2 x$, ta được

$$(3) \Leftrightarrow -6\cot^2 x - 5\cot x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = \dfrac{1}{2} \\ \cot x = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{2} + k\pi, \\ x = \operatorname{arccot}\left(-\dfrac{4}{3}\right) + k\pi. \end{array}\right.$$

H6 *Cách 1*. Ta có

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0.$$

Dễ thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

và $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

nên các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Cách 2. Do $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

và $2\sin x\cos x = \sin 2x$ nên

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 + \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi. \end{array}\right.$$

Ta thấy ngay hai họ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ là như nhau. Do đó hai cách giải cho cùng một kết quả.

H7 (6) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\\ x = k\pi.\end{array}\right.$

H8 ĐKXĐ : $\sin 2x \neq 0$ và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\cot 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Dễ thấy các giá trị này của x không thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

27. a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

b) $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$.

c) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi$.

28. a) $x = k2\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ (loại $\sin x = 2$).

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi.\end{array}\right.$

29. a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x + 10\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3}$ (đã loại $\sin x = 2$). Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình này có nghiệm gần đúng là $x \approx -0{,}34$. Đó cũng là nghiệm gần đúng của phương trình đã cho.

b) Ta thấy $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2x < \pi$. Với điều kiện đó, ta có

$$4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2},$$

trong đó α là số thực thuộc khoảng $(0 ; \pi)$ thoả mãn $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Dùng bảng số hoặc máy tính, ta tìm được $\alpha \approx 2{,}42$. Từ đó nghiệm gần đúng của phương trình là $x = \frac{\alpha}{2} \approx 1{,}21$.

Chú ý. Không trình bày bài giải một cách "ngắn gọn" như sau :

$$4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x \approx 2{,}42 \Leftrightarrow x \approx 1{,}21,$$

bởi vì dấu "$\Leftrightarrow$" thứ hai trong dòng trên đây là không chính xác.

c) $x \approx 0{,}20$; $x \approx 2{,}68$.

d) $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Với điều kiện đó, ta có

$$5 - 3\tan 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3x = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{3},$$

trong đó β là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan\beta = \frac{5}{3}$; bảng số hoặc máy tính cho ta $\beta \approx 1{,}03$. Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là $x \approx 0{,}34$.

Chú ý. Không trình bày bài giải một cách "ngắn gọn" như sau :

$$5 - 3\tan 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3x \approx 1{,}03 \Leftrightarrow x \approx 0{,}34.$$

30. a) $x = \pi + \alpha + k2\pi$ (hay $x = \alpha + (2k+1)\pi$),

trong đó α là số thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{24} + k\pi. \end{array}\right.$

c) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 3(1 + \cos 2x) = 13$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16.$

Chia hai vế cho $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ta được $\dfrac{5}{\sqrt{34}}\sin 2x - \dfrac{3}{\sqrt{34}}\cos 2x = \dfrac{16}{\sqrt{34}}$.

Do $\left(\dfrac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$ nên ta chọn được số α sao cho

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ và } \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Vậy $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \dfrac{16}{\sqrt{34}}$.

Dễ thấy phương trình này vô nghiệm vì $\dfrac{16}{\sqrt{34}} > 1$.

31. Trước hết, ta biến đổi

$$5\sin 6t - 4\cos 6t = \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin 6t - \frac{4}{\sqrt{41}}\cos 6t\right) = \sqrt{41}\sin(6t - \alpha),$$

trong đó số α được chọn sao cho $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$.

Sử dụng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta chọn được $\alpha \approx 0{,}675$.

a) Vật ở vị trí cân bằng khi $d = 0$, nghĩa là $\sin(6t - \alpha) = 0$, hay

$$t = \frac{\alpha}{6} + k\frac{\pi}{6} \text{ (với } k \in \mathbb{Z}).$$

Ta cần tìm k nguyên dương sao cho $0 \le t \le 1$.

$$0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\alpha}{6} + k\frac{\pi}{6} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\pi} \le k \le \frac{6 - \alpha}{\pi}.$$

Với $\alpha \approx 0{,}675$, ta thu được $-0{,}215 < k < 1{,}7$, nghĩa là $k \in \{0 ; 1\}$. Vậy trong khoảng 1 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở vị trí cân bằng là

$$t = \frac{\alpha}{6} \approx 0{,}11 \text{ (giây) và } t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}64 \text{ (giây)}.$$

b) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất khi và chỉ khi $|d|$ nhận giá trị lớn nhất. Điều đó xảy ra nếu $\sin(6t - \alpha) = \pm 1$. Ta có

$$\sin(6t - \alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(6t - \alpha) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}.$$

Ta tìm k nguyên dương sao cho $0 \le t \le 1$.

$$0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{6-\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Với $\alpha \approx 0{,}675$, ta thu được $-0{,}715 < k < 1{,}2$; nghĩa là $k \in \{0 ; 1\}$. Vậy trong khoảng 1 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất là

$$t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} \approx 0{,}37 \text{ (giây) và } t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}90 \text{ (giây)}.$$

32. a) Viết $a\sin x + b\cos x = C\sin(x + \alpha)$ trong đó $C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin(x + \alpha)$ theo thứ tự là 1 và -1 nên giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $a\sin x + b\cos x$ theo thứ tự là $\sqrt{a^2 + b^2}$ và $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Ta có $\sin^2 x + \sin x \cos x + 3\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x + 2$.

Vậy $\sin^2 x + \sin x \cos x + 3\cos^2 x$ đạt giá trị lớn nhất là

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \text{ và giá trị nhỏ nhất là } \frac{-\sqrt{5}}{2} + 2.$$

c) $A\sin^2 x + B\sin x \cos x + C\cos^2 x = A.\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{B}{2}.\sin 2x + C.\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \frac{B}{2}\sin 2x + \frac{C-A}{2}\cos 2x + \frac{C+A}{2}$$

$$= a\sin 2x + b\cos 2x + c,$$

trong đó $a = \frac{B}{2}$, $b = \frac{C-A}{2}$, $c = \frac{C+A}{2}$.

Vậy $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x$ đạt giá trị lớn nhất là

$$\sqrt{a^2+b^2}+c = \sqrt{\frac{B^2+(C-A)^2}{4}} + \frac{C+A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2} + \frac{C+A}{2},$$

và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2} + \frac{C+A}{2}$.

33. a) Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ đều không nghiệm đúng phương trình. Do đó

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0.$$

Phương trình cuối vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ đều không nghiệm đúng phương trình. Do đó

$$3\sin^2 x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3}-9)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\tan^2 x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3}, \\ \tan x = -\frac{8}{3} + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

- $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$
- $\tan x = -\frac{8}{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right) + k\pi.$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ và } x = \arctan\left(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right) + k\pi.$$

c) Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ đều không nghiệm đúng phương trình. Do đó

$$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctan(-5) + k\pi. \end{array}\right.$$

34. a) $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, \\ x = k\dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Kết quả trên có thể viết gọn thành một họ nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}$.

b) $x = k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$.

c) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 2\sin 3x \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x\,(\cos x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3}, \\ x = k\pi, \\ x = k\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Chú ý. Kết quả trên có thể viết gọn thành hai họ nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = k\dfrac{\pi}{3}$.

d) $x = \pi + k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

35. a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 4x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 7x \cos x = \cos 3x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = k\dfrac{\pi}{2}, \\ x = k\dfrac{\pi}{5}. \end{array}\right. \quad \left(\text{Có thể thu gọn thành } \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2}, \\ x = k\dfrac{\pi}{5}. \end{array}\right.\right)$$

b) $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5}$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

36. a) ĐKXĐ : $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Với điều kiện đó, ta có

$$\tan\frac{x}{2} = \tan x \Leftrightarrow \frac{x}{2} = x + k\pi \Leftrightarrow x = -k2\pi.$$

Dễ thấy các giá trị tìm được của x thoả mãn ĐKXĐ. Vậy các nghiệm của phương trình là $x = -k2\pi$ (cũng có thể viết là $k2\pi$).

b) ĐKXĐ : $\cos(2x + 10^o) \neq 0$ và $\sin x \neq 0$. Với điều kiện đó, ta có

$$\tan(2x + 10^o) + \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan(2x + 10^o) = \tan(90^o + x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 10^o = 90^o + x + k180^o \Leftrightarrow x = 80^o + k180^o.$$

Hiển nhiên $x = 80^o + k180^o$ thoả mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 80^o + k180^o$.

c) Đặt $t = \tan x$, với điều kiện $\cos x \neq 0$.

Dễ thấy $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Do đó $1 + \sin 2x = 1 + \dfrac{2t}{1 + t^2} = \dfrac{(1 + t)^2}{1 + t^2}$.

Vậy ta có phương trình

$$(1 - t)\,\frac{(1 + t)^2}{1 + t^2} = 1 + t. \qquad (1)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t)^2 = (1 + t)(1 + t^2) \Leftrightarrow 2t^2(1 + t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1.$$

Từ đó $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi,\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\end{array}\right.$

d) ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$. Với điều kiện đó, ta có

$$\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \sin 3x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \dfrac{1}{\cos x \cos 2x} = \cos x.\end{array}\right.$$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$.

- $\dfrac{1}{\cos x \cos 2x} = \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x \cos 2x = 1 \quad \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)\cos 2x = 2$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Kết luận. Phương trình có các nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}$ và $x = k\pi$ (chú ý rằng hai họ nghiệm này có thể thu gọn thành một họ $x = k\dfrac{\pi}{3}$).

e) ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$ và $\sin 4x \neq 0$. Tuy nhiên, chỉ cần $\sin 4x \neq 0$ là đủ (vì $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x \cos 2x$). Với điều kiện đó ta có

$$\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{2\sin 2x \cos 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\cos x} = \frac{\cos 4x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow 4x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}.$$

Để là nghiệm, các giá trị này còn phải thoả mãn điều kiện $\sin 4x \neq 0$. Ta có

– Nếu k chia hết cho 3, tức là $k = 3m$ ($m \in \mathbb{Z}$) thì $\sin 4x = \sin 4m\pi = 0$.

– Nếu k không chia hết cho 3, tức là $k = 3m \pm 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) thì

$$\sin 4x = \sin\left(\pm\frac{4\pi}{3} + 4m\pi\right) = \pm\sin\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{3}$ với k nguyên và không chia hết cho 3.