§4. CẤP SỐ NHÂN (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm vững khái niệm cấp số nhân ;

– Nắm được một tính chất đơn giản về ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân ;

– Nắm vững công thức xác định số hạng tổng quát và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết dựa vào định nghĩa để nhận biết một cấp số nhân ;

– Biết cách tìm số hạng tổng quát và cách tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân trong các trường hợp không phức tạp ;

– Biết vận dụng các kết quả lí thuyết đã học trong bài để giải quyết các bài toán đơn giản liên quan đến cấp số nhân ở các môn học khác, cũng như trong thực tế cuộc sống.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Nhiều tác giả (trong và ngoài nước), khi định nghĩa cấp số nhân có đưa ra ràng buộc khác 0 và khác 1 đối với công bội của cấp số. Với mục đích không gây ra những thay đổi không cần thiết cho quá trình dạy – học, SGK đã định nghĩa cấp số nhân theo quan điểm của SGK 2000.

• Mệnh đề đảo của định lí 1 là một định lí. Tuy nhiên, nhằm tránh sự "quá tải" về kiến thức cho đại đa số học sinh phổ thông, SGK không trình bày định lí này.

• Nhằm giảm nhẹ nội dung lí thuyết giảng dạy trên lớp, SGK không trình bày chứng minh của định lí 2.

• Ví dụ 2 nhằm mục đích tạo cho học sinh ý thức về mối liên hệ giữa cấp số nhân và dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính dạng $u_{n+1} = au_n + b$ (a, b là các hằng số).

• Bên cạnh mục đích dẫn dắt học sinh đến khái niệm cấp số nhân, Bài toán ở đầu mục 1 (cùng ví dụ 4) và hoạt động **H3** còn nhằm giúp học sinh hiểu được sự hiện diện, cũng như các ứng dụng của cấp số nhân trong việc giải quyết các vấn đề thường gặp trong cuộc sống hàng ngày. Thông qua việc giảng dạy các bài toán vừa nêu, giáo viên cần làm cho học sinh hiểu rõ sự giống nhau về bản chất toán học của hai tình huống được đề cập trong các bài toán đó cùng các tình huống tương tự khác.

• *Đối với các học sinh khá, giỏi*, giáo viên nên :

– Nêu và chứng minh định lí đảo của định lí 1.

– Yêu cầu học sinh giải quyết bài toán khái quát của bài toán ở đầu mục 1.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Mục 1, mục 2 và định lí 2 ;

Tiết 2. Nội dung còn lại của bài.

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Giáo viên cần chuẩn bị trước ở nhà bảng tóm tắt nội dung của bài toán mở đầu và bài toán nêu trong mục *Đố vui*.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Giúp học sinh hiểu định nghĩa cấp số nhân.

Trả lời

a) Dãy số đã cho là một cấp số nhân ; vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 1,5.

b) Dãy số đã cho không là một cấp số nhân.

c) Dãy số đã cho là một cấp số nhân ; vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 0.

H2 *Mục đích.* Giúp học sinh hiểu rõ định lí 1.

Trả lời. Không tồn tại ; vì nếu ngược lại ta sẽ có

$$u_{100}^2 = u_{99}.u_{101} = (-99) . 101 < 0, \text{ vô lí.}$$

H3 *Mục đích.* Như đã nêu ở phần II.

Gợi ý. Giáo viên yêu cầu học sinh nhận xét về sự tương đồng giữa bài toán ở hoạt động này và bài toán ở đầu mục 1. Từ đó, yêu cầu học sinh dựa vào kết quả đã đạt được ở ví dụ 4 để giải bài toán nêu ra trong hoạt động này.

Giải. Kí hiệu u_n (người) là dân số của thành phố A sau n năm. Bằng các lập luận tương tự như đối với bài toán đặt ra ở đầu mục 1 (xem mục 1 và ví dụ 4), ta có

$$u_n = 3.10^6.(1 + 0{,}02)^n.$$

Do đó $u_2 = 3 . 10^6 . (1{,}02)^2 = 3\ 121\ 200$ (người).

Đố vui. *Mục đích*

– Rèn luyện kĩ năng vận dụng định lí 3.

– Giảm căng thẳng, gây hứng thú cho học sinh trong giờ học.

– Giúp học sinh hình dung được sự khác biệt giữa "tăng trưởng theo cấp số nhân" và "tăng trưởng theo cấp số cộng".

Giải. Kí hiệu u_n (đồng) là số tiền mà nhà tỉ phú phải trả cho nhà toán học ở ngày thứ n. Ta có (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Từ đó, số tiền mà nhà tỉ phú phải trả cho nhà toán học sau 30 ngày là

$$S_{30} = u_1 . \frac{1-q^{30}}{1-q} = 2^{30} - 1 = 1\,073\,741\,823 \text{ (đồng).}$$

Số tiền mà nhà toán học đã "bán" cho nhà tỉ phú sau 30 ngày là

$$10 . 10^6 . 30 = 300\,000\,000 \text{ (đồng).}$$

Như vậy, sau cuộc mua – bán nhà tỉ phú đã "lãi" được

$$300\,000\,000 - 1\,073\,741\,823 = -\,773\,741\,823 \text{ (đồng).}$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

29. a) Dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội $q = -2$.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{6(n+1)}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra (u_n) không phải là một cấp số nhân.

c) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(-1)^{n+1} . 3^{2(n+1)}}{(-1)^n . 3^{2n}} = -9$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = -9$.

d) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = 16$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra (x_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 16$.

30. a) $\boxed{\times}$ Giảm.

b) $\boxed{\times}$ Tăng.

31. Vì $q < 0$ và $u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó,

$$u_3^2 = u_2 . u_4 = 4.9 = 36 \;\Rightarrow\; u_3 = -6,$$

$$4^2 = u_2^2 = u_1 . u_3 = -\,6u_1 \Rightarrow\; u_1 = -\frac{8}{3}.$$

32. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Vì $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ nên cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 0$, và do đó $u_n > 0$ $\forall n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ đó

$$1 = u_1 . u_3 = u_2^2 \Rightarrow u_2 = 1,$$

$$\frac{1}{16} = u_3 . u_5 = u_4^2 \Rightarrow u_4 = \frac{1}{4}.$$

$$u_3^2 = u_2 . u_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}.$$

Do đó $\quad u_1 = \dfrac{1}{u_3} = 2$ và $u_5 = \dfrac{1}{16} : u_3 = \dfrac{1}{8}$.

Vậy cấp số nhân cần tìm là : $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

33. Theo định lí 2, ta có

$$u_m = u_1 . q^{m-1} = u_1 . q^{k-1} . q^{m-k} = u_k . q^{m-k}.$$

Áp dụng

a) $-686 = u_7 = u_4 . q^3 = 2 . q^3 \Rightarrow q^3 = -343 \Rightarrow q = -7$.

b) Không tồn tại ; vì nếu ngược lại thì cấp số nhân (u_n) sẽ có công bội q mà

$$q^{20} = \frac{u_{22}}{u_2} = \frac{-2000}{5} < 0, \text{ vô lí.}$$

34. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo kết quả bài tập 33, ta có

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3} = \frac{135}{-5} = -27 \Leftrightarrow q = -3.$$

$$-5 = u_3 = u_1 . q^2 = 9u_1 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{5}{9}.$$

Số hạng tổng quát : $u_n = -\dfrac{5}{9} . (-3)^{n-1} = -5.(-3)^{n-3}$.

35. Kí hiệu u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam poloni sau n chu kì bán rã. Ta có 7314 ngày gồm 53 (= 7314 : 138) chu kì bán rã. Như thế, theo đề bài, ta cần tính u_{53}.

Từ giả thiết của bài toán suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 20 : 2 = 10$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó

$$u_{53} = 10 \, . \left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2{,}22.\ 10^{-15} \text{ (gam)}.$$

36. a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Ta có $q = 54 : 18 = 3$.

Vì $39\,366 : 18 = 2187 = 3^7$ nên cấp số nhân đã cho có 8 số hạng.

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tìm, ta được

$$S = 18 \, . \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 59\,040.$$

b) Tương tự trên, ta được : Cấp số nhân đã cho có 13 số hạng và có công bội $q = -\frac{1}{2}$.

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tìm, ta được

$$S = \frac{1}{256} \, . \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{13}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2731}{2^{20}} = \frac{2731}{1\,048\,576}.$$

37. Kí hiệu A, B, C, D là số đo bốn góc (tính theo đơn vị độ) của bốn góc lượng giác đã cho. Không mất tổng quát, giả sử $A \leq B \leq C \leq D$. Khi đó, từ giả thiết của bài toán ta có $D = 8A$, và A, B, C, D theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó, ta có

$$8A = D = A.q^3 \Leftrightarrow q = 2.$$

Do đó $360 = A + B + C + D = A \, . \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 15A \Leftrightarrow A = 24$ (độ).

Dẫn tới $B = A \, . \, 2 = 48$ (độ), $C = A \, . \, 2^2 = 96$ (độ) và $D = A \, . \, 2^3 = 192$ (độ).