B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC (11 tiết)

§4. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm được định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm, giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số để tìm giới hạn (hữu hạn và vô cực) của một số hàm số ;

– Biết vận dụng các định lí về giới hạn hữu hạn để tìm giới hạn (hữu hạn) của một số hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Giới hạn của hàm số tại một điểm, tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số đều được định nghĩa qua giới hạn của một dãy số. Chỉ cần phát biểu một số định nghĩa như trong SGK và cho học sinh phát biểu định nghĩa trong các trường hợp còn lại : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• Trong định nghĩa 1, hàm số f được giả thiết là xác định trên tập hợp $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$. Như vậy $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ là một tập con của tập xác định X của f ; $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ không nhất thiết bằng X.

• Trong SGK có nêu bốn giới hạn mà học sinh cần nhớ để sử dụng tìm các giới hạn khác. Sau đây ta sẽ chứng minh b), còn a), c), d) được chứng minh tương tự.

b) Đặt $g(x) = x^k$. Giả sử (x_n) là một dãy số âm bất kì sao cho $\lim x_n = -\infty$. Khi đó

$$g(x_n) = x_n^k = \underbrace{x_n.x_n...x_n}_{k \text{ thừa số}}.$$

Áp dụng quy tắc 1 về giới hạn vô cực của dãy số, ta được

$$\lim g(x_n) = +\infty \quad \text{nếu } k \text{ chẵn,}$$

và $$\lim g(x_n) = -\infty \quad \text{nếu } k \text{ lẻ.}$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** *Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 3 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau : Tiết đầu dành cho mục 1, tiết thứ hai dành cho mục 2 và phần đầu mục 3 (cho đến ví dụ 5), tiết cuối dành cho phần còn lại.

*** *Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích*. Giúp học sinh hiểu được định nghĩa giới hạn (hữu hạn) của hàm số tại một điểm.

Giải. Với mọi $x \neq -1$, ta có

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1} = x + 2.$$

Với mọi dãy số (x_n) trong $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mà $\lim x_n = -1$, ta có

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n + 2) = -1 + 2 = 1.$$

Vậy $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = 1.$$

H2 *Mục đích*. Giúp học sinh biết vận dụng định lí 1.

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = \frac{4}{-1} = -4.$$

H3 Khi tìm giới hạn trong ví dụ 5, ta đã biến đổi hàm số đã cho để có thể áp dụng được định lí 1. Cách biến đổi này là mới đối với học sinh. Hoạt động **H3** nhằm củng cố phương pháp đã được sử dụng. Giải tương tự như ví dụ 5 bằng cách chia tử và mẫu của phân thức cho x^4. Ta được kết quả

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7} = 2.$$

H4 Mục đích của hoạt động này là giúp học sinh biết vận dụng định lí 2.

Vì $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 7x) = -8$ nên

$$\lim_{x \to -1} \left| x^3 + 7x \right| = 8 \text{ và } \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 + 7x} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

21. a) Với $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = x - 4.$$

Với mọi dãy số (x_n) trong $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ($x_n \neq -1$ với mọi n) mà $\lim x_n = -1$, ta có

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n - 4) = -1 - 4 = -5.$$

Do đó $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -5.$$

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty ; 5)$.

Với mọi dãy số (x_n) trong $(-\infty ; 5) \setminus \{1\}$ sao cho $\lim x_n = 1$, ta có

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{\sqrt{5 - x_n}} = \frac{1}{2}.$$

Do đó $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{5 - x}} = \frac{1}{2}.$$

22. a) $\lim x'_n = 0$, $\lim x''_n = 0$, $\lim f(x'_n) = \lim \cos 2n\pi = 1$,

$$\lim f(x''_n) = \lim \cos (2n + 1)\frac{\pi}{2} = 0.$$

b) $\lim f(x'_n) \neq \lim f(x''_n)$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

23. a) 37 ; b) 0 ;

c) Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x - 1.$$

Do đó $$\lim_{x \to 0} x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}(x - 1) = -1.$$

d) Với mọi $x > 0$ và $x \neq 9$, ta có

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = \frac{\sqrt{x} - 3}{x(9 - x)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{x(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{x(\sqrt{x} + 3)}.$$

Do đó $$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = -\lim_{x \to 9} \frac{1}{x(\sqrt{x} + 3)} = -\frac{1}{54}.$$

e) 1 ;

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1} = 3$. Do đó $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}} = \sqrt{3}$.

24. a) 0 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{3}$;

d) Với mọi $x < 0$, ta có

$$\frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1} = \frac{|x|^3 \sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3x^3 - 1} = \frac{-x^3 \sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3x^3 - 1} = \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3 - \frac{1}{x^3}}.$$

Do đó $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3 - \frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{3}.$$

25. a) $\frac{1}{2}$; b) 0.