§4. VI PHÂN (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Hiểu được định nghĩa vi phân ;

– Nắm được công thức tính gần đúng nhờ vi phân.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Biết cách tính vi phân của một số hàm số thường gặp ;

– Hiểu được ứng dụng của vi phân trong tính gần đúng.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Vi phân của hàm số là một khái niệm khó (xem mục *Bổ sung kiến thức*). Giáo viên cần lưu ý những điểm sau đây

– *Vi phân của hàm số f tại điểm* x_0 ứng với số gia Δx là tích $f'(x_0)\Delta x$. Khi cố định x_0 thì vi phân của hàm số f tại điểm x_0 là một *đại lượng phụ thuộc tuyến tính vào* Δx. Nhưng kí hiệu $df(x_0)$ (theo truyền thống), lại không thể hiện rõ điều đó. Đặc điểm này dễ làm cho học sinh lầm tưởng rằng vi phân của hàm số tại một điểm luôn là một số, nhất là ngay sau đó là nội dung ứng dụng vi phân vào việc tính gần đúng.

– *Vi phân của hàm số f* là một đại lượng phụ thuộc vào cả x lẫn Δx. Nhưng kí hiệu $df(x)$ cũng không thể hiện rõ điều đó.

2) Khi tính gần đúng giá trị của một biểu thức dựa trên công thức gần đúng của vi phân (học sinh có thể dùng bảng số với bốn chữ số thập phân hay máy tính bỏ túi loại CASIO *f(x) - 500MS* hoặc tương đương), giáo viên nên gợi ý để học sinh lựa chọn hàm số f cũng như chọn x_0 và Δx một cách thích hợp. Chú ý rằng có thể có nhiều cách chọn f, x_0 và Δx, nhưng cần chọn sao cho dễ tính $f(x_0)$ nhất.

Ví dụ 1. Để tính gần đúng giá trị của $\sqrt{4,01}$ thì có hai cách thường dùng là

Cách 1. Đặt $y = \sqrt{x}$, chọn $x_0 = 4$ và $\Delta x = 0,01$.

Cách 2. Đặt $y = \sqrt{4 + x}$, chọn $x_0 = 0$ và $\Delta x = 0,01$.

Ví dụ 2

Để tính gần đúng giá trị của $\dfrac{1}{0,9995}$ thì có hai cách thường dùng là

Cách 1. Đặt $y = \frac{1}{x}$, chọn $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0{,}0005$.

Cách 2. Đặt $y = \frac{1}{1+x}$, chọn $x_0 = 0$ và $\Delta x = -0{,}0005$.

3) Khi đưa ra một công thức tính gần đúng thì một điều thường được quan tâm là công thức đó cho kết quả "chính xác" đến mức nào ? Nói khác đi là : Nếu áp dụng công thức đó thì sai số (tuyệt đối) mắc phải là bao nhiêu ?

Rất tiếc là việc ước lượng sai số tuyệt đối của công thức (2) trong SGK

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\ \Delta x \qquad (2)$$

nằm ngoài chương trình THPT ; vì vậy khi áp dụng công thức (2) để tính gần đúng một số nào đó, ta không thể biết sai số mắc phải là bao nhiêu. Chính vì lẽ đó cho nên trong ví dụ 3, sau khi áp dụng công thức (2) để tính gần đúng giá trị $\sin 30^o30'$, các tác giả đã so sánh kết quả tìm được với kết quả cho bởi máy tính bỏ túi (để thấy kết quả cũng khá chính xác). Khi giải bài tập 41, giáo viên nên yêu cầu học sinh so sánh kết quả tìm được qua việc sử dụng công thức (2) với kết quả tìm được nhờ máy tính bỏ túi.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích*. Giúp học sinh tính được vi phân của hàm số tại một điểm x_0 cho trước ứng với một số gia Δx đã cho, đồng thời nhắc nhở rằng vi phân của hàm số tại một điểm là một đại lượng phụ thuộc vào Δx.

Đáp số. $df(2) = -\frac{\Delta x}{18\sqrt{2}}$.

Nếu lấy $\Delta x = 0{,}2$ thì $df(2) = -\frac{0{,}1}{9\sqrt{2}} \approx -0{,}00786$ (chính xác đến 10^{-5}).

Nếu lấy $\Delta x = 0{,}02$ thì $df(2) = -\frac{0{,}01}{9\sqrt{2}} \approx -0{,}00079$ (chính xác đến 10^{-5}).

H2 *Mục đích.* Giúp học sinh tính được vi phân của hàm số.

Đáp số. a) Chọn (D), $dy = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}\,dx$;

b) Chọn (A), $dy = 3\cos 3x\,dx$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

39. –0,01 (ứng với $\Delta x = 0{,}01$) ; –0,001 (ứng với $\Delta x = 0{,}001$).

40. a) $\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}\,dx$; b) $(\sin x + x\cos x)dx$;

c) $(2x + \sin 2x)dx$; d) $\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$ (hoặc $3\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx$).

41. a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Đặt $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}0005$ và áp dụng công thức gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x,$$

ta được
$$\frac{1}{x_0 + \Delta x} \approx \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}\,.\,\Delta x,$$

hay
$$\frac{1}{0{,}9995} \approx 1 + 0{,}0005 = 1{,}0005.$$

Chú ý. Nếu bấm máy tính bỏ túi, ta được $\dfrac{1}{0{,}9995} \approx 1{,}00050025$ (chính xác đến 10^{-8}).

b) $\approx 0{,}998$. *Gợi ý.* Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$; đặt $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0{,}004$.

c) Xét hàm số $f(x) = \cos x$, ta có $f'(x) = -\sin x$. Đặt $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$ (vì $\dfrac{\pi}{360} = 30'$) và áp dụng công thức gần đúng trên, ta được

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\frac{\pi}{360}.$$

Vậy $\cos 45^o30' \approx \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{360} \approx 0{,}7009.$

Chú ý. Nếu bấm máy tính bỏ túi, ta được $\cos 45^o30' \approx 0{,}700909264$ (chính xác đến 10^{-9}).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về vi phân

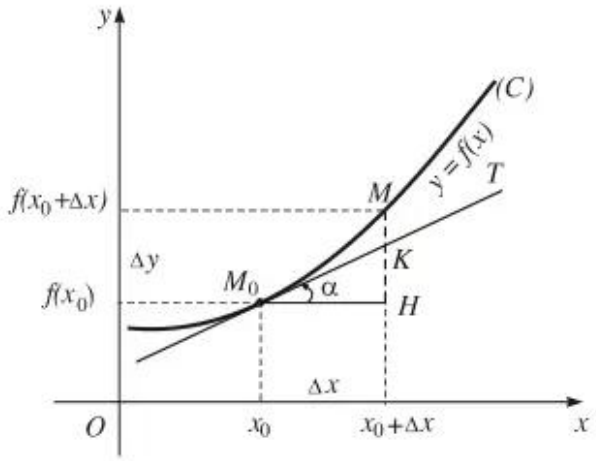
• Hình ảnh hình học của vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với Δx đã cho như sau :

Trên hình 5.13, ta có

$\overline{HK} = \overline{M_0H}\,.\tan\alpha = \Delta x.f'(x_0)$.

Vậy $\quad dy = \overline{HK}$.

Ta thấy khi $|\Delta x|$ khá nhỏ thì $\overline{HM}$ xấp xỉ $\overline{HK}$ tức là $\Delta y \approx dy$.



Hình 5.13

• Với định nghĩa của vi phân trong SGK, $dy = df(x) = f'(x)dx$, thì ta có :

+ Hàm số f có đạo hàm tại điểm x khi và chỉ khi nó có vi phân tại điểm x.

+ $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ $\left(\text{hay } y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

• Người ta còn thường định nghĩa vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau :

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là dy (*hay* $df(x_0)$), *là một biểu thức có hai tính chất như sau :*

1. *Tuyến tính đối với* Δx, *tức là* $dy = A\Delta x$ (*A không phụ thuộc vào* Δx)[1].

2. *Sai khác* Δy *một vô cùng bé bậc cao so với* Δx, *tức là* $dy = \Delta y + [\alpha(\Delta x)].\Delta x$ *với* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Từ định nghĩa này dễ dàng suy ra $A = f'(x_0)$.

---

(1) Biểu thức $A\Delta x$ không gọi là biểu thức bậc nhất đối với Δx, vì A có thể bằng 0.

Mặt khác, định nghĩa vi phân kiểu này nêu được rõ tính chất cơ bản của vi phân. Đó là : vi phân là một biểu thức đơn giản hơn nhiều so với Δy.

Thật vậy, ta đã biết $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nói chung là một biểu thức phức tạp đối với Δx ; còn dy là một biểu thức đơn giản vì nó là biểu thức tuyến tính đối với Δx (d$y = f'(x_0).\ \Delta x$).

Chẳng hạn, nếu $y = f(x) = \sin x$ thì

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

là biểu thức lượng giác rất phức tạp đối với Δx ; còn d$y = (\cos x_0).\Delta x$ là biểu thức tuyến tính đối với Δx. Hơn nữa, ta có d$y \approx \Delta y$ với sai số là $|\alpha(\Delta x).\Delta x|$. Rõ ràng nếu $|\Delta x|$ càng nhỏ thì $|\alpha(\Delta x)|$ cũng càng nhỏ, do đó sai số $|\alpha(\Delta x).\Delta x|$ lại càng nhỏ.

Định nghĩa vi phân kiểu này cho phép dễ dàng mở rộng cho định nghĩa vi phân của hàm số hai hay nhiều biến số. Còn định nghĩa vi phân theo SGK để học sinh dễ hiểu mà vẫn chính xác *đối với hàm số một biến số*, nhưng không thể mở rộng cho hàm số hai hay nhiều biến số.