§5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm chắc các khái niệm hợp và giao của hai biến cố ;

– Biết được khi nào hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết vận dụng các quy tắc cộng và nhân xác suất để giải các bài toán xác suất đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Ta gọi biến cố "A hoặc B xảy ra" là biến cố hợp của A, B và kí hiệu nó là $A \cup B$ vì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Tương tự ta gọi biến cố "Cả A và B xảy ra" là biến cố giao của A và B vì tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố này là $\Omega_A \cap \Omega_B$. Tuy nhiên, ta không kí hiệu biến cố giao của A và B là $A \cap B$ mà lại kí hiệu là AB.

• Về mặt toán học có thể đồng nhất một biến cố với tập hợp các kết quả thuận lợi cho nó. Vì thế, nếu định nghĩa các biến cố A, B là hai tập con của không gian mẫu (như SGK thí điểm chuyên ban năm 1995) thì biến cố hợp của A và B là tập $A \cup B$ và biến cố giao của chúng là tập $A \cap B$.

• Nhắc lại rằng hai biến cố A và B xung khắc tương đương với $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Biến cố A và biến cố đối $\overline{A}$ rõ ràng là xung khắc. Điều ngược lại không đúng, nếu A và B xung khắc thì không nhất thiết biến cố này là biến cố đối của biến cố kia.

Ví dụ

Gieo một con súc sắc. Xét biến cố A : "Mặt k chấm xuất hiện với k là số chẵn" và biến cố B : "Mặt xuất hiện là mặt 5 chấm". Hai biến cố A và B xung khắc. Nhưng biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: "Mặt k chấm xuất hiện với k là số lẻ". Biến cố $\overline{A}$ khác biến cố B.

• Không có một sự diễn tả tương đương khái niệm hai biến cố A và B độc lập chỉ bằng mối quan hệ giữa các tập Ω_A và Ω_B. Nói chung giả thiết độc lập thường được cho trước. Nếu hai phép thử T và S được thực hiện độc lập thì mỗi biến cố liên quan tới T sẽ độc lập với tất cả các biến cố liên quan tới S.

• Trong quy tắc cộng xác suất cho nhiều biến cố, điều kiện "Các biến cố A_1, A_2, ..., A_k là các biến cố đôi một xung khắc" là mạnh hơn điều kiện "Các biến cố A_1, A_2, ..., A_k là xung khắc" (tức là chúng không đồng thời xảy ra). Điều này cũng giống như trong lí thuyết tập hợp, điều kiện "các tập A_1, A_2, ..., A_k đôi một không giao nhau" là mạnh hơn điều kiện "giao của các tập hợp A_1, A_2, ..., A_k là tập $\varnothing$".

• Trong quy tắc nhân xác suất cho nhiều biến cố, điều kiện "Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau" mạnh hơn điều kiện "Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một độc lập với nhau" vì điều kiện đầu đòi hỏi việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi nhóm biến cố tuỳ ý trong các biến cố đã cho không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của *toàn bộ* các biến cố còn lại.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Củng cố khái niệm hai biến cố xung khắc.

Giải. Không gian mẫu là tập hợp các học sinh trong trường em. Nếu trường em có học sinh giỏi cả Văn và Toán thì tập hợp học sinh giỏi Văn và tập hợp học sinh giỏi Toán có phần tử chung, do đó hai biến cố A và B không xung khắc. Nếu trường em không có học sinh nào giỏi cả Văn và Toán thì hai biến cố A và B xung khắc.

H2 *Mục đích.* Giúp học sinh vận dụng quy tắc tính xác suất của biến cố đối.

Giải

Biến cố đối của A là biến cố $\overline{A}$ "Kết quả nhận được là một số chẵn". Theo ví dụ 3, ta có $P(\overline{A}) = \frac{13}{18}$. Vậy

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}.$$

H3 *Mục đích.* Giúp học sinh hiểu rõ mối quan hệ giữa các khái niệm "Hai biến cố xung khắc" và "Hai biến cố độc lập". Qua đó củng cố thêm nhận thức của học sinh về hai khái niệm này.

Giải

a) Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên AB luôn luôn không xảy ra. Vậy $P(AB) = 0$.

b) Hai biến cố xung khắc A và B với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ thì không độc lập. Thật vậy, vì $P(A)\,P(B) > 0$ nên $0 = P(AB) \neq P(A)\,P(B)$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

34. a) Gọi A_i là biến cố "Đồng xu thứ i sấp" (i = 1, 2, 3), ta có $P(A_i) = \frac{1}{2}$. Các biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập. Theo quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

b) Gọi H là biến cố "Có ít nhất một đồng xu sấp". Biến cố đối của biến cố H là $\overline{H}$: "Cả ba đồng xu đều ngửa". Tương tự như câu a) ta có $P(\overline{H}) = \frac{1}{8}$. Vậy

$$P(H) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

c) Gọi K là biến cố "Có đúng một đồng xu sấp". Ta có

$$K = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Theo quy tắc cộng xác suất, ta có

$$P(K) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

Theo quy tắc nhân xác suất, ta tìm được $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = \frac{1}{8}$.

Tương tự $P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \frac{1}{8}$. Từ đó $P(K) = \frac{3}{8}$.

35. a) Gọi A_i là biến cố "Người bắn cung bắn trúng hồng tâm ở lần bắn thứ i" (i = 1, 2, 3), ta có $P(A_i) = 0{,}2$. Gọi K là biến cố "Trong ba lần bắn có duy nhất một lần người đó bắn trúng hồng tâm", ta có $K = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Theo quy tắc cộng xác suất, ta có $P(K) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$. Theo quy tắc nhân xác suất, ta tìm được $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}2.0{,}8.0{,}8 = 0{,}128$. Tương tự $P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}128$. Vậy

$$P(K) = 3.0{,}128 = 0{,}384.$$

b) Gọi H là biến cố "Trong ba lần bắn, người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần". Biến cố đối của biến cố H là $\overline{H}$ "Cả ba lần bắn, người đó đều bắn không trúng hồng tâm". Ta có $\overline{H} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Theo quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0,8 \,.\, 0,8 \,.\, 0,8 = 0,512.$$

Vậy $$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0,512 = 0,488.$$

36. Gọi A_1 là biến cố "Đồng xu A sấp", A_2 là biến cố "Đồng xu A ngửa", B_1 là biến cố "Đồng xu B sấp", B_2 là biến cố "Đồng xu B ngửa".

Theo bài ra ta có

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5\,; \quad P(B_1) = 0,75\,; \quad P(B_2) = 0,25.$$

a) A_2B_2 là biến cố "Cả hai đồng xu A và B đều ngửa". Theo quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(A_2B_2) = 0,5 \,.\, 0,25 = 0,125 = \frac{1}{8}.$$

b) Gọi H_1 là biến cố "Khi gieo hai đồng xu lần đầu thì cả hai đồng xu đều ngửa", H_2 là biến cố "Khi gieo hai đồng xu lần thứ hai thì cả hai đồng xu đều ngửa". Khi đó H_1H_2 là biến cố "Khi gieo hai đồng xu hai lần thì hai lần cả hai đồng xu đều ngửa".

Từ câu a) ta có $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{8}$.

Áp dụng quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(H_1H_2) = P(H_1)P(H_2) = \frac{1}{8} \,.\, \frac{1}{8} = \frac{1}{64}.$$

37. Gọi A_i là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng câu thứ i" với $i = 1, ..., 10$. Khi đó $A_1A_2... A_{10}$ là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu".

Từ giả thiết ta có $P(A_i) = 0,8$.

Áp dụng quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(A_1A_2... A_{10}) = P(A_1)P(A_2)... P(A_{10}) = (0,8)^{10} \approx 0,1074.$$