§5. ĐẠO HÀM CẤP CAO (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh

– Nắm vững định nghĩa đạo hàm cấp n ;

– Hiểu được ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh

– Có kĩ năng thành thạo trong việc tính đạo hàm cấp hữu hạn của một số hàm số thường gặp ;

– Biết cách tính đạo hàm cấp n của một số hàm đơn giản như hàm đa thức, hàm $y = \dfrac{1}{ax + b}$ ($a \neq 0$, a và b là những hằng số) và các hàm số $y = \sin ax$, $y = \cos ax$ (a là hằng số).

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Khi dạy học sinh tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{ax + b}$ thì trước hết giáo viên nên dạy cách tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ nhờ phương pháp quy nạp. Sau đó cho công thức

$$\left(\frac{1}{ax + b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \;.\; n!\, a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

và yêu cầu học sinh chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

• Ngoài ra nên hướng dẫn học sinh giải thêm các bài tập sau bằng phương pháp quy nạp.

a) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

b) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 a) $y'' = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$; b) $y'' = (\cos x)' = -\sin x$.

H2 *Mục đích.* Củng cố ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

Đáp số. $a(4) = -6\text{m/s}^2$.

H3 *Mục đích.* Củng cố khái niệm đạo hàm cấp cao và phát triển khả năng phán đoán của học sinh.

Trả lời. Đúng.

Chú ý rằng chỉ cần thử lại công thức đối với $n = 1, 2, 3, 4$ là có thể rút ra kết luận được.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

42. a) $f^{(4)}(x) = 24 - 16\cos 2x$; b) $f^{(5)}(x) = -16\sin 2x$;

c) $f'(x) = 6(x+10)^5$; $f''(x) = 30(x+10)^4$; $f'''(x) = 120(x+10)^3$;

$f^{(4)}(x) = 360(x+10)^2$; $f^{(5)}(x) = 720(x+10)$; $f^{(6)}(x) = 720$;

$f^{(n)}(x) = 0 \ (\forall n \geq 7)$.

43. a) Cho $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Ta hãy chứng minh công thức

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . \, n!}{x^{n+1}} \ (\forall n \geq 1) \qquad (1)$$

bằng phương pháp quy nạp.

+ Với $n = 1$, ta có

$$f^{(n)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{và} \quad \frac{(-1)^n . n!}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x^2}.$$

Suy ra (1) đúng khi $n = 1$.

+ Giả sử (1) đúng cho trường hợp $n = k$ $(k \geq 1)$, tức là

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k . \, k!}{x^{k+1}},$$

ta phải chứng minh (1) cũng đúng cho trường hợp $n = k + 1$, tức là

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} . (k+1)!}{x^{k+2}}.$$

Thật vậy, ta có

$$f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = -\frac{(-1)^k k!(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}.$$

b) Cho $f(x) = \cos x$. Ta hãy chứng minh công thức

$$f^{(4n)}(x) = \cos x \qquad (\forall n \geq 1) \qquad (2)$$

bằng phương pháp quy nạp.

Ta có

$$f'(x) = -\sin x \, ; f''(x) = -\cos x \, ; f'''(x) = \sin x \, ; f^{(4)}(x) = \cos x.$$

+ Với $n = 1$ thì

$$f^{(4n)}(x) = f^{(4)}(x) = \cos x.$$

Suy ra (2) đúng khi $n = 1$.

+ Giả sử (2) đúng cho trường hợp $n = k$ ($k \geq 1$), tức là

$$f^{(4k)}(x) = \cos x,$$

ta phải chứng minh (2) cũng đúng cho trường hợp $n = k + 1$, tức là phải chứng minh

$$f^{(4(k+1))}(x) = \cos x \quad (\text{hay } f^{(4k+4)}(x) = \cos x).$$

Thật vậy, vì

$$f^{(4k)}(x) = \cos x$$

nên $$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x \ ; \ f^{(4k+2)}(x) = -\cos x \ ;$$

$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x \ ; \ f^{(4k+4)}(x) = \cos x \ .$$

c) *Gợi ý.* Tính $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x)$. Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$f^{(4n)}(x) = a^{4n} \sin ax.$$

44. Ta có $a(t) = v'(t) = 8 + 6t$.

a) Khi $t = 4s$ thì $a(4) = 32\text{m/s}^2$.

b) Khi $v(t) = 11\text{m/s}$ thì ta được

$$8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $t = 1\text{s}$ thì $a(1) = 14\text{m/s}^2$.