§5. GIỚI HẠN MỘT BÊN (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm được định nghĩa giới hạn bên phải, giới hạn bên trái của hàm số tại một điểm và quan hệ giữa giới hạn của hàm số tại một điểm với các giới hạn một bên của hàm số tại điểm đó.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết áp dụng định nghĩa giới hạn một bên và vận dụng các định lí về giới hạn hữu hạn để tìm giới hạn một bên của một số hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số tại một điểm được định nghĩa qua giới hạn của dãy số tương tự như giới hạn của hàm số tại một điểm. Có thể cho học sinh phát biểu các định nghĩa trong mục 2.1 trang 159.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích.* Nhằm giúp học sinh áp dụng các định nghĩa 1, định nghĩa 2 và nhận xét sau định nghĩa để tìm giới hạn bên phải, giới hạn bên trái và giới hạn của hàm số tại một điểm.

Giải

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} x^3 = (-1)^3 = -1\ ; \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (2x^2-3) = 2.(-1)^2 - 3 = -1.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -1$.

Chú ý. Khi viết (1), ta đã sử dụng nhận xét 1).

Thật vậy, đặt $g(x) = x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta biết rằng

$$\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} x^3 = (-1)^3 = -1.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to(-1)^-} x^3 = \lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1} g(x) = \lim\limits_{x\to-1} x^3 = (-1)^3 = -1.$

H2 Hoạt động này nhằm giúp học sinh biết áp dụng định nghĩa để tìm giới hạn vô cực.

Giải. Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$. Với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty, 2)$ mà $\lim x_n = 2$, ta có

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{\sqrt{2-x_n}} = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

26. a) 0 ; b) 10 ; c) $+\infty$; d) $-\infty$.

27. a) Với mọi $x > 2$, ta có $|x-2| = x-2$. Do đó

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1.$$

b) Với mọi $x < 2$, ta có $|x-2| = 2-x$. Do đó

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (-1) = -1.$$

c) Từ a) và b) suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

28. a) Với $x > 0$, ta có

$$\frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}.$$

Do đó $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

b) Với $x < 2$, ta có

$$\frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}} = (x+2)\sqrt{2-x}.$$

Do đó $$\lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-} (x+2)\sqrt{2-x} = 0.$$

c) Với mọi $x > -1$,

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} = 0.$

d) Với $-3 < x < 3$,

$$\frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

29. $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 3.$