§6. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm được các quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm và tại vô cực.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết vận dụng các quy tắc đó để từ các giới hạn đơn giản tìm giới hạn vô cực của các hàm số khác.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Vì thời gian có hạn nên có một số định lí và quy tắc về giới hạn vô cực không được nêu trong bài. Tuy các điều này là hiển nhiên song khi giải bài tập, giáo viên nên giải thích rõ cho học sinh.

ĐỊNH LÍ. *Giả sử* $(a\ ;\ b)$ *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* f, g *là hai hàm số xác định trên* $(a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$. *Nếu* $f(x) \le g(x)$ *với mọi* $x \in (a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Định lí này cũng đúng trong các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Nó được suy ra từ định nghĩa giới hạn của hàm số và từ định lí tương tự về giới hạn vô cực của các dãy số.

• Hai quy tắc sau là hệ quả của định lí vừa nêu.

Nếu $\lim f(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) ($x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$) thì $\lim[f(x) + g(x)]$ và $\lim[f(x).\, g(x)]$ được cho trong hai bảng sau :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [f(x) + g(x)]$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [f(x) . g(x)]$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Khi giải bài tập, học sinh được quyền sử dụng định lí và các quy tắc vừa nêu.

• Một vài điều cần lưu ý khi áp dụng quy tắc 2.

– Trước hết ta phát biểu quy tắc 2 một cách đầy đủ (để cho gọn ta sẽ chỉ lấy ra hàng thứ hai của bảng).

Giả sử $(a\ ;\ b)$ *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* f, g *là hai hàm số xác định trên* $(a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *và* $g(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$ *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(*Có thể lấy khoảng* $(a\ ;\ b)$ *nhỏ tuỳ ý chứa điểm* x_0).

– Trong thực hành, ta thường gặp trường hợp hàm số g xác định trên một tập hợp số thực X chứa điểm x_0 mà điều kiện $g(x) < 0$ không được thoả mãn với mọi $x \in X \setminus \{x_0\}$ nhưng được thoả mãn với mọi $x \in (a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$, trong đó $(a\ ;\ b)$ là một khoảng chứa trong X. Khi đó, đương nhiên có thể áp dụng quy tắc đã nêu. Để cho tiện người ta phát biểu quy tắc đó như sau :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *và* $g(x) < 0$ *với* $x \neq x_0$ *đủ gần* x_0 *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Trong trường hợp $x \to +\infty$, quy tắc trên được phát biểu như sau :

Nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L} > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *và* $g(x) < 0$ *với* x *đủ lớn thì*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Quy tắc 2 trong các trường hợp $x \to -\infty$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ được phát biểu một cách tương tự.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^2 - 15x}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho x^4, ta được

$$f(x) = \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^2 - 15x} = \frac{3 + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{15}{x^3}} \text{ với mọi } x > 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3 + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{7}{x^4}\right) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{15}{x^3}\right) = 0$ và

$\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{15}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{15}{x}\right) > 0$ với mọi $x > 0$ đủ lớn ($x > 15$), nên

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Có thể tìm giới hạn này theo cách thứ hai : Chia tử và mẫu của phân thức cho x^2, ta được

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5 + \dfrac{7}{x^2}}{1 - \dfrac{15}{x}} \text{ với mọi } x > 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3x^2 + 5 + \dfrac{7}{x^2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{15}{x}\right) = 1 > 0$ nên

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{10}\right)^-} \dfrac{10x + 3}{x^2 - \dfrac{x}{10}}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{10}\right)^-} (10x + 3) = 4 > 0$, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{10}\right)^-} \left(x^2 - \frac{x}{10}\right) = 0$ và

$x^2 - \frac{x}{10} = x\left(x - \frac{1}{10}\right) < 0$ với mọi $x < \frac{1}{10}$ đủ gần $\frac{1}{10}$ $\left(0 < x < \frac{1}{10}\right)$ nên

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{10}\right)^-} \frac{10x + 3}{x^2 - \frac{x}{10}} = -\infty.$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Các hoạt động nhằm giúp học sinh biết vận dụng quy tắc 1 và quy tắc 2 để tìm giới hạn vô cực.

H1 Giải tương tự như ví dụ 2.

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x^3} = x\sqrt[3]{-2 + \frac{1}{x}} \text{ với mọi } x > 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{-2 + \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{-2} < 0$ nên

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x^3} = -\infty.$$

H2 Giải tương tự như ví dụ 3.

Vì $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + x - 2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2) = 0$ và

$x - 2 < 0$ với mọi $x < 2$ nên

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = -\infty.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

34. a) $-\infty$.

b) $\sqrt{2x^4 - 3x + 12} = x^2\sqrt{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{12}{x^4}}$ với mọi $x > 0$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{12}{x^4}} = \sqrt{2} > 0$

nên $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12} = +\infty.$

35. a) Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$, $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$ và $x - 2 > 0$ với mọi $x > 2$ nên

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x + 1}{x - 2} = +\infty.$$

b) $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x^2}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

d) Với mọi $x < 2$, ta có

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$ và $x^2 - 4 < 0$ với $-2 < x < 2$,

nên

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) = -\infty.$$

36. a) $+\infty$.

b) Với mọi $x < 0$, ta có $\dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \dfrac{x^2\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{1 - 2x} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}}$.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \right) = 0$ và $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} > 0$ với mọi $x < 0$

nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = +\infty.$

37. a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{(x-1)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{2x-3} = \dfrac{3}{-1} = -3 < 0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2}.\dfrac{2x+1}{2x-3}\right] = -\infty.$

b) $\dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{5}{x-2}.$

Vì $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5}{x-2} = -5 < 0$ nên

$$\lim_{x\to 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)} = -\infty.$$