§7. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nhận biết được một số dạng vô định khi giải các bài toán tìm giới hạn và nắm được các kĩ thuật để giải các bài toán đó.

• *Về kĩ năng*

Rèn luyện các cách "khử" dạng vô định :

– Giản ước hoặc tách các thừa số ;

– Nhân với biểu thức liên hợp của một biểu thức đã cho ;

– Chia cho x^p (khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$), ...

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Thật ra khi giải các ví dụ và một số bài tập trong các bài trước, ta đã gặp các dạng vô định đã nêu. Trong bài này, ta chỉ tổng kết lại các phương pháp đã sử dụng và bổ sung một vài kĩ thuật cần thiết để giải các bài toán thuộc loại này.

• Lưu ý cho học sinh khi gặp các dạng vô định, không thể áp dụng ngay được các định lí về giới hạn hữu hạn trong §4 cũng như các quy tắc tìm giới hạn vô cực trong §6. Tuy nhiên, với các bài tập trong SGK chỉ cần thực hiện một vài phép biến đổi đơn giản, ta sẽ thay hàm số đã cho bằng một hàm số mới mà với hàm số này, có thể áp dụng định nghĩa giới hạn cũng như các định lí và quy tắc đã nêu.

• Trong ví dụ 4 và trong một vài bài tập của bài này ta đã sử dụng các kết quả sau :

a) *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

b) *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) + g(x)\right] = +\infty$.

Học sinh được quyền sử dụng các kết quả hiển nhiên đó.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Gợi ý các hoạt động trên lớp

Các hoạt động $\boxed{\textbf{H1}}$ và $\boxed{\textbf{H2}}$ nhằm giúp học sinh nhận biết được các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ và biết cách khử các dạng vô định đó. Học sinh đã giải một số bài tập tương tự trong các bài học trước, trong đó các hàm số cho trước đã được biến đổi để có thể áp dụng các định nghĩa, các định lí và các quy tắc về giới hạn. Làm như vậy chính là khử các dạng vô định.

$\boxed{\textbf{H1}}$ Với mọi $x \neq -2$,

$$\frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2(x + 2)} = \frac{(x - 2)(x^2 + 4)}{x^2}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} = -8$.

$\boxed{\textbf{H2}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} = +\infty$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

38. Dạng $\frac{0}{0}$

a) Với $x \neq 2$, ta có

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 3$.

b) $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x \to (-3)^+} \dfrac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)^2}$

$$= \lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{2x-1}{x+3} = -\infty.$$

c) $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3+1} - 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)}$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = 0.$$

39. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

a) 0.

b) Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \frac{|x|\sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{|x|\left(3 - \frac{17}{|x|}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{3 - \frac{17}{|x|}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

40. Dạng $0.\infty$

a) Với $x > -1$ đủ gần -1 $(-1 < x < 0)$, ta có

$$(x^3+1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = (x+1)(x^2 - x + 1)\sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \sqrt{x+1}\,(x^2 - x + 1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}} = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}} = 1.$

41. Dạng $\infty - \infty$ và $\dfrac{0}{0}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

b) $$\frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x} = \frac{2x - x^2 - 1}{x(x-1)\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)} = \frac{-(x-1)^2}{x(x-1)\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{1 - x}{x\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)} \quad \text{với } x \neq 1. \qquad (1)$$

Do đó $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x} = 0.$$

Chú ý. Một cách chính xác, ta có đẳng thức (1) với mọi $x \neq 1$ và đủ gần 1 vì

$$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Do đó ta có (1) với $0 < x < 1$ và $1 < x < 2$.