§8. HÀM SỐ LIÊN TỤC (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

• *Về kiến thức*

Giúp học sinh nắm được định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng và trên một đoạn, tính liên tục của các hàm số thường gặp trên tập xác định của chúng và hiểu được định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục cũng như ý nghĩa hình học của định lí này.

• *Về kĩ năng*

Giúp học sinh biết cách chứng minh hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng, trên một đoạn và áp dụng định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục để chứng minh sự tồn tại nghiệm của một số phương trình đơn giản.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến ví dụ 3.

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

Để tận dụng thời gian trên lớp giáo viên nên vẽ trước các hình trong bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 và **H2** là những hoạt động nhằm giúp học sinh nắm được định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm.

H1 Vì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$ nên hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm $x = 0$.

H2 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \neq f(1) = 2$. Do đó hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 1$.

(Nếu hàm số f liên tục tại điểm $x = 1$ thì $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$; do đó $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$).

H3 Hoạt động này nhằm giới thiệu cho học sinh định nghĩa hàm số liên tục trên nửa khoảng.

Giải. Hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[-1 ; +\infty)$ nếu nó liên tục trên khoảng $(-1 ; +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$.

Vì với mỗi $x_0 \in (-1 ; +\infty)$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{x + 1} = \sqrt{x_0 + 1} = f(x_0),$$

nên hàm số liên tục trên khoảng $(-1 ; +\infty)$. Ngoài ra

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \sqrt{x + 1} = 0 = f(-1).$$

Do đó hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[-1 ; +\infty)$.

H4 Hoạt động này nhằm giúp học sinh biết vận dụng định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục để chứng minh sự tồn tại nghiệm của một phương trình.

Hàm số f liên tục trên đoạn $[0 ; 2]$, $f(0) = -1$, $f(2) = 2$.

Vì $-0,8 \in (-1 ; 2)$ nên theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0 ; 2)$ sao cho $f(c) = -0,8$.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

46. a) Hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^3 - x + 3) = x_0^3 - x_0 + 3 = f(x_0).$$

Vậy f liên tục tại điểm x_0. Do đó hàm số f liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$.

Chứng minh tương tự, hàm số g liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$.

b) Với mọi $x \neq 2$, ta có

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x - 1) = 1 = f(2)$.

Vậy hàm số f liên tục tại điểm $x = 2$.

c) Với mọi $x \neq 1$, ta có

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3 \neq 2 = f(1)$.

Vậy hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 1$.

47. b) Hàm số f xác định khi và chỉ khi

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Vậy hàm số f xác định trên khoảng $(-1 ; 1)$.

Với mọi $x_0 \in (-1 ; 1)$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} = f(x_0).$$

Vậy hàm số f liên tục tại điểm x_0. Do đó f liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$.

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ xác định trên đoạn $[-2 ; 2]$.

Với mọi $x_0 \in (-2 ; 2)$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{8 - 2x_0^2} = f(x_0).$$

Vậy hàm số f liên tục trên khoảng $(-2 ; 2)$. Ngoài ra, ta có

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \sqrt{8 - 2.(-2)^2} = 0 = f(-2),$$

và
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \sqrt{8 - 2.2^2} = 0 = f(2).$$

Do đó hàm số f liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$.

d) Chứng minh tương tự như **H3** .

48. a) Tập xác định của hàm số f là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Hàm phân thức hữu tỉ f liên tục trên tập xác định của nó, tức là liên tục trên các khoảng $\left(-\infty ; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

b) Hàm số f xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Do đó tập xác định của hàm số f là $(-\infty ; 1]$.

Với mọi $x_0 \in (-\infty ; 1)$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}) = \sqrt{1 - x_0} + \sqrt{2 - x_0} = f(x_0).$$

Vậy hàm số f liên tục trên khoảng $(-\infty ; 1)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}) = 1 = f(1).$$

Do đó hàm số f liên tục trên $(-\infty ; 1]$.

49. Hàm số $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$ liên tục trên đoạn $[0 ; \pi]$, $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$. Vì $f(0)$ và $f(1)$ trái dấu nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một số thực $c \in (0 ; \pi)$ sao cho $f(c) = 0$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho.

IV – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Tính liên tục một bên của hàm số

§5 đã đề cập đến khái niệm giới hạn một bên của hàm số tại một điểm. Trong một số giáo trình giải tích người ta cũng đưa vào khái niệm hàm số liên tục bên phải và liên tục bên trái tại một điểm.

ĐỊNH NGHĨA

a) *Hàm số f xác định trên nửa khoảng* $[x_0 ; b)$ *được gọi là liên tục bên phải tại điểm* x_0 *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

b) *Hàm số f xác định trên nửa khoảng* $(a ; x_0]$ *được gọi là liên tục bên trái tại điểm* x_0 *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

NHẬN XÉT. a) Theo định nghĩa vừa nêu, định nghĩa hàm số liên tục trên một đoạn trong SGK được phát biểu như sau :

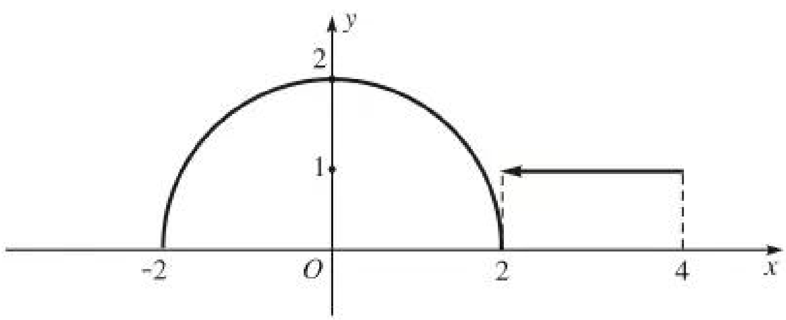
Hàm số f xác định trên đoạn $[a ; b]$ *được gọi là liên tục trên đoạn* $[a ; b]$ *nếu nó liên tục trên khoảng* $(a ; b)$, *liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b.*

b) Dễ thấy hàm số f xác định trên một khoảng chứa điểm x_0, liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó liên tục bên phải và liên tục bên trái tại điểm này.

c) Hàm số $g : [-2 ; 4] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \text{với } -2 \le x \le 2, \\ 1 & \text{với } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$ nhưng không liên tục trên đoạn $[-2 ; 4]$ (h. 4.1).



Hình 4.1