E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

– Giáo viên cung cấp cho học sinh đề cương ôn tập nhằm gợi ý cho học sinh về nhà ôn tập và lập bảng các kiến thức cần nhớ (xem bảng kiến thức cần nhớ dưới đây) ; đồng thời giao bài tập để học sinh chuẩn bị ở nhà.

– Trên lớp, giáo viên thu bài chuẩn bị của học sinh, dành khoảng 15 phút nêu câu hỏi kiểm tra kiến thức của học sinh. Phần lớn thời gian còn lại dành để chữa bài tập.

– Giáo viên dành 1 tiết để ôn tập và 1 tiết để kiểm tra.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

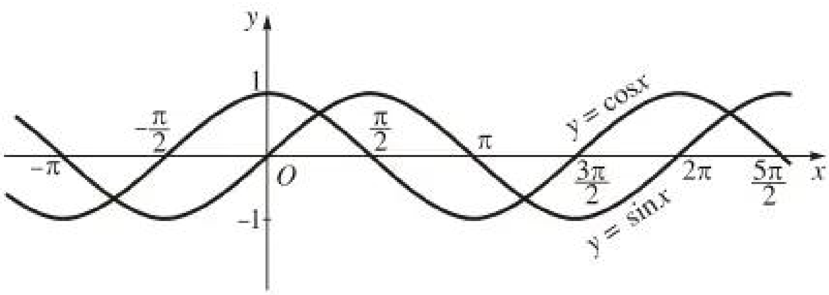
1. Các hàm số lượng giác $y = \sin x$ và $y = \cos x$

- Tập xác định : $\mathbb{R}$; tập giá trị : $[-1 ; 1]$.
- Tuần hoàn với chu kì 2π.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	0

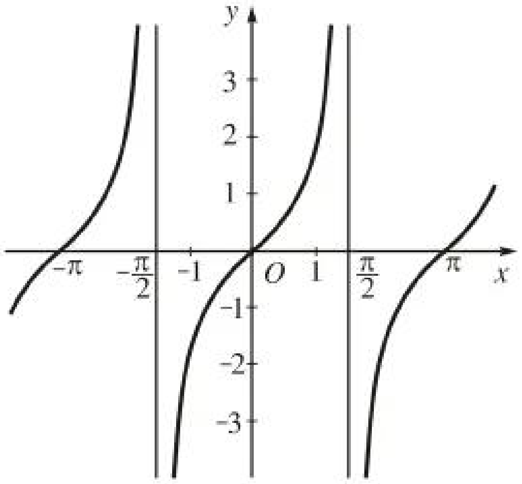
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	-1

- Đồ thị (h. 1.16).



Hình 1.16

2. Hàm số lượng giác $y = \tan x$



Hình 1.17

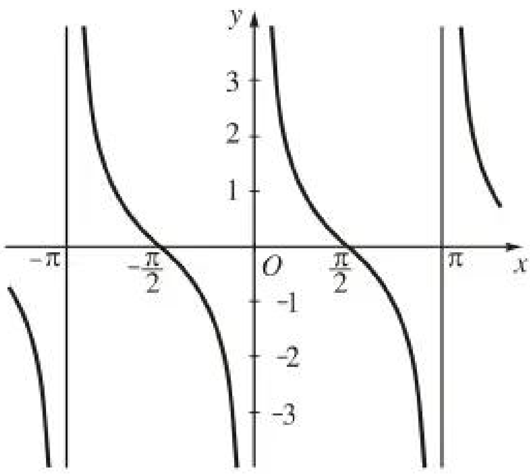
- Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

  Tập giá trị : $\mathbb{R}$.
- Tuần hoàn với chu kì π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

- Đồ thị (h. 1.17).

3. Hàm số lượng giác $y = \cot x$



Hình 1.18

- Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.

  Tập giá trị : $\mathbb{R}$.
- Tuần hoàn với chu kì π.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi\,;\,(k+1)\pi)$.
- Đồ thị (h. 1.18).

4. Phương trình lượng giác cơ bản

- Các phương trình $\sin x = m$ và $\cos x = m$ vô nghiệm khi $|m| > 1$ và có vô số nghiệm khi $|m| \leq 1$.
- $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ với $|m| \leq 1$ và $\sin\alpha = m$.
- $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ với $|m| \leq 1$ và $\cos\alpha = m$.
- $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, với $\tan\alpha = m$.
- $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, với $\cot\alpha = m$.

5. Cách giải một số dạng phương trình lượng giác đơn giản

Dạng của phương trình	Cách giải
Phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với $f(x)$, trong đó $f(x)$ là một biểu thức lượng giác nào đó.	Đặt ẩn phụ $t = f(x)$.
Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin x + b\cos x = c\ (ab \neq 0)$	Biến đổi vế trái về dạng $C\sin(x+\alpha)$ hoặc $C\cos(x+\beta)$.
Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$	Chia hai vế cho $\cos^2 x$ (với $\cos x \neq 0$) hoặc chia hai vế cho $\sin^2 x$ (với $\sin x \neq 0$).
Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d.$	Viết $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi đưa về dạng phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

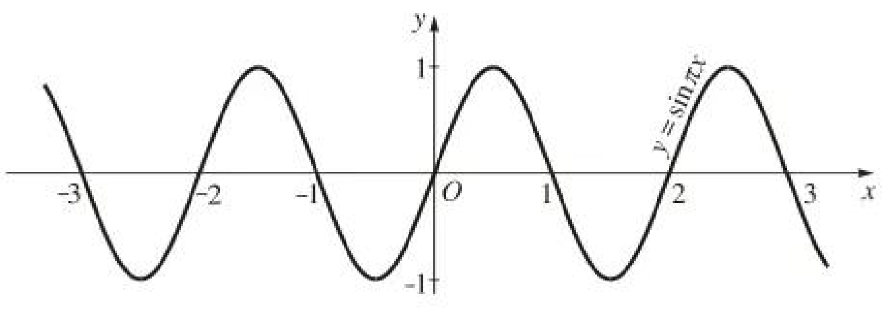
43. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Sai ; f) Đúng ; g) Sai.

44. a) Đặt $m = 2k$, do hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên với mọi x, ta có

$$f(x+m) = \sin[\pi(x+2k)] = \sin(\pi x + 2k\pi) = \sin \pi x = f(x).$$

b) Giáo viên tự làm.

c) (h. 1.19).



Hình 1.19

45. a) $\sin x + \tan\dfrac{\pi}{7}\cos x = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right).$$

b) $\tan\dfrac{\pi}{7}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\left(\sin x\sin\dfrac{\pi}{7} + \cos x\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\sin\left(x - \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\sin\left(x + \frac{5\pi}{14}\right).$$

46. a) $x = \dfrac{7\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$.

b) Với ĐKXĐ của phương trình, ta có $\tan(2x + 45^{\circ}) = \cot(45^{\circ} - 2x)$ và

$\tan\left(180^{\circ} - \dfrac{x}{2}\right) = \tan\left(-\dfrac{x}{2}\right)$, nên

$$\tan(2x + 45^{\circ})\tan\left(180^{\circ} - \frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot(45^{\circ} - 2x)\tan\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(-\frac{x}{2}\right) = \tan(45^{\circ} - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 30^{\circ} + k120^{\circ}.$$

c) $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3} + k\pi$. *Gợi ý.* Dùng công thức hạ bậc.

d) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k\pi$.

47. a) $x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{2} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Gợi ý. Dùng công thức hạ bậc đưa về $2\sin 2x - \cos 2x = 0$.

b) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + k\pi$.

c) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = 2\arctan(-5) + k2\pi$.

Gợi ý. Biến đổi phương trình như sau :

$$\sin^2\frac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

48. a) *Gợi ý*. $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

b) $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$.

Gợi ý. Biến đổi phương trình rồi áp dụng kết quả câu a) như sau :

$$2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right).$$

c) Chú ý rằng $1-\sqrt{3} < 0$, ta đặt điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ rồi bình phương hai vế của phương trình thì được

$$4(1 - \sin 2x) = 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi. \end{array}\right.$$

Thử vào điều kiện $\sin x - \cos x < 0$, ta thấy :

• Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ thoả mãn điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ khi và chỉ khi k chẵn, tức là $x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi$ với $m \in \mathbb{Z}$.

• Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ thoả mãn điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ khi và chỉ khi k lẻ, tức là $x = \frac{\pi}{3} + (2m+1)\pi = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi$ với $m \in \mathbb{Z}$.

Ta có kết quả như đã nêu ở câu b).

49. ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$ (các giá trị này đều thoả mãn ĐKXĐ).

50. a) Kết luận suy ra từ phép thử trực tiếp.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$. *Gợi ý.* Nếu $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\tan x$ xác định. Do đó ta có thể đặt $t = \tan x$. Khi đó, phương trình có dạng (để làm xuất hiện $\tan x$, ta chia cả tử và mẫu của vế trái cho $\cos^3 x$) :

$$\frac{t^3+1}{(t^2+1)(2-t)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

51.(B).

52. (C) *Gợi ý.* Đưa biểu thức đã cho về dạng $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

53. (D).

54. (A).

55. (C) *Gợi ý.* $y = \cos^2 x - \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{5}{4} - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2$.

56. (D) *Gợi ý.* Đưa biểu thức đã cho về dạng $5\sin(2x + \alpha) + 6$ với α thích hợp.

57. (B).

58. (A).

59. (C).

60. (A).

61. (D)

62. (B).

63. (D).

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho trong mỗi câu 1, 2, 3 sau đây :

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho hai hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \cos 3x$. Khi đó :

(A) f là hàm số chẵn và g là hàm số lẻ ;

(B) f là hàm số lẻ và g là hàm số chẵn ;

(C) f và g là hai hàm số chẵn ;

(D) f và g là hai hàm số lẻ.

Câu 2 *(1 điểm)*. Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = 8\sin x + 6\cos x$. Khi đó :

(A) $M = 8$; (B) $M = 6$;

(D) $M = 10$; (C) $M = 14$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Số nghiệm trong khoảng $(-\pi ; 5\pi)$ của phương trình

$\left(\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos x = 0$ là

(A) 6 ; (B) 8 ; (C) 10 ; (D) 12.

Câu 4 *(5 điểm)*.

1) (2 *điểm*) Tìm các số *a*, *b* để phương trình $a\sin x + b\cos x = \sqrt{3} + 1$ nhận hai số $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{3}$ làm hai nghiệm.

2) (3 *điểm*) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình nói trên với *a*, *b* vừa tìm thấy.

Câu 5 (2 *điểm*). Giải phương trình

$$\frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - \cos 3x + \cos 5x} = 0.$$

Đáp án

Câu 1. (B).

Câu 2. (D).

Câu 3. (D).

Câu 4. 1) Phương trình $a\sin x + b\cos x = \sqrt{3} + 1$ nhận $\frac{\pi}{6}$ làm nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1$$

và nhận $\frac{\pi}{3}$ làm nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} = \sqrt{3} + 1.$$

Từ đó suy ra $a = b = 2$.

2) Phương trình vừa tìm được là $2(\sin x + \cos x) = \sqrt{3} + 1$.

Nó tương đương với $\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$ nên tương đương với phương trình dạng $\sin u = m$, trong đó $u = x + \frac{\pi}{4}$, $m = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$.

Vì $u = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ là một nghiệm của phương trình $\sin u = m$ nên mọi nghiệm của nó là $u = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k2\pi$ và $u = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi.$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Câu 5

Ta có $\frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - \cos 3x + \cos 5x} = \frac{(\sin x + \sin 5x) - \sin 3x}{(\cos x + \cos 5x) - \cos 3x}$

$$= \frac{2\sin 3x \cos 2x - \sin 3x}{2\cos 3x \cos 2x - \cos 3x} = \frac{\sin 3x(2\cos 2x - 1)}{\cos 3x(2\cos 2x - 1)}.$$

Do đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} \tan 3x = 0 \\ \cos 2x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ \cos 2x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \text{ (vì } \cos\frac{2k\pi}{3} \neq \frac{1}{2} \text{ với mọi } k \in \mathbb{Z}).$$

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3, hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho.

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho hai hàm số $f(x) = \tan 4x$ và $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó :

(A) f là hàm số chẵn và g là hàm số lẻ ;

(B) f là hàm số lẻ và g là hàm số chẵn ;

(C) f và g đều là các hàm số chẵn ;

(D) f và g đều là các hàm số lẻ ;

Câu 2 *(1 điểm)*. Nếu kí hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

thì ta có :

(A) $m = -2$; (B) $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; (C) $m = -\sqrt{2}$; (D) $m = \sqrt{2}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Số giao điểm có hoành độ thuộc đoạn $[0, 4\pi]$ của hai đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 6 ; (D) 0.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(4 điểm)*. Giải phương trình $\cos^2 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Câu 5 *(3 điểm)*.

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ (a, b, c là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) được biểu diễn bởi một điểm duy nhất trên đường tròn lượng giác nếu $c^2 = a^2 + b^2$.

Đáp án

Câu 1. (B).

Câu 2. (C).

Gợi ý. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin 2x \sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\sin 2x$.

Câu 3. (B).

Câu 4. $\cos^2 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hoặc $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

• $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

• $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 5

Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ tương đương với phương trình

$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (trong đó $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

Nếu $c^2 = a^2 + b^2$ thì phương trình có một trong các dạng

a) $\sin(x + \alpha) = \sin\frac{\pi}{2}$, khi đó $x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$,

b) $\sin(x + \alpha) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, khi đó $x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi$,

nên các nghiệm được biểu diễn bởi đúng một điểm trên đường tròn lượng giác.