E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

• Thời lượng dành cho việc ôn tập chương là 2 tiết, trong đó có 1 tiết được dùng để làm bài kiểm tra cuối chương.

• Để tiết ôn tập đạt hiệu quả tốt, giáo viên nên yêu cầu học sinh chuẩn bị trước ở nhà các bài tập từ 44 đến 49. Tại tiết ôn tập trên lớp, giáo viên tiến hành chữa bài (nếu cần thiết) và đồng thời hướng dẫn học sinh giải các bài tập 50 và 51.

• Nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho học sinh khi học chương tiếp theo (Chương IV – Giới hạn), trong tiết ôn tập chương này giáo viên nên giới thiệu cho học sinh khái niệm tổng, hiệu, tích, thương của hai dãy số thông qua việc chữa bài tập 46.

• Giáo viên nên tránh việc yêu cầu học sinh học thuộc lòng một cách hình thức (học "vẹt") các định nghĩa, định lí.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp quy nạp

Để chứng minh mệnh đề chứa biến nguyên dương $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi số nguyên $n \geq p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ cho trước) bằng phương pháp quy nạp, cần thực hiện hai bước sau :

Bước 1 (bước cơ sở). Chứng minh $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = p$.

Bước 2 (bước quy nạp). Với k là một số nguyên dương tuỳ ý lớn hơn hoặc bằng p, xuất phát từ giả thiết $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = k$ chứng minh $A(n)$ cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

2. Dãy số

a) Các định nghĩa

• Dãy số vô hạn : Là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$.

• Dãy số hữu hạn : Là một hàm số xác định trên tập hợp m số nguyên dương đầu tiên (m là số nguyên dương cho trước).

• Dãy số tăng : (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n > 0$.

• Dãy số giảm : (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n < 0$.

• Dãy số không đổi : (u_n) là dãy số không đổi $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n = 0$.

• Dãy số bị chặn trên : Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số bị chặn dưới : Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số bị chặn : Là dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

• Cấp số cộng : (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} = u_n + d$ (d là hằng số và được gọi là công sai).

• Cấp số nhân : (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n,\ u_{n+1} = u_n.q$ (q là hằng số và được gọi là công bội).

b) Các kết quả

• Định lí về ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng :

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Rightarrow u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \ (k \geq 2).$$

• Công thức của số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) :

$$u_n = u_1 + (n-1)d \ \ (d \text{ là công sai}).$$

• Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) :

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

• Định lí về ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân :

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Rightarrow u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad (k \geq 2).$$

• Công thức của số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) :

$$u_n = u_1.\, q^{n-1} \ (q \text{ là công bội}).$$

• Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $q \neq 1$:

$$S_n = u_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

44. Ta sẽ chứng minh

$$1.2^2 + 2.3^2 + \ldots + (n-1).n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12} \qquad (1)$$

với mọi số nguyên $n \geq 2$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, ta có

$$1\,.\,2^2 = \frac{2.(2^2 - 1)(3.2 + 2)}{12}.$$

Như vậy, (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \geq 2$. Khi đó

$$1.2^2 + 2.3^2 + ... + (k-1).k^2 + k.(k+1)^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k.(k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)[(k-1)(3k+2) + 12(k+1)]}{12} = \frac{k(k+1)(3k^2 + 11k + 10)}{12}$$

$$= \frac{k(k+1)[3k(k+2) + 5(k+2)]}{12} = \frac{(k+1)(k^2+2k)(3k+5)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)^2 - 1][3(k+1)+2]}{12}.$$

Điều đó chứng tỏ (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \geq 2$.

45. Ta sẽ chứng minh

$$u_n = \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, theo giả thiết ta có $u_1 = 2 = \dfrac{2^{1-1} + 1}{2^{1-1}}$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có

$$u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{\dfrac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}} + 1}{2} = \frac{2^k + 1}{2^k},$$

nghĩa là (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

46. a) $a_n = n + 1$; b) $b_n = \dfrac{(n-1)^2}{n+1}$;

c) $c_n = \dfrac{2n(n^2+1)}{(n+1)^2}$; d) $d_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$.

47. a) $u_{n+1} - u_n = 8$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 8$.

b) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)$ không là hằng số. Suy ra (u_n) không là cấp số cộng.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}$ không là hằng số. Suy ra (u_n) không là cấp số nhân.

c) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 8$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 8$.

d) Xét tương tự phần b) ta được (u_n) không là cấp số cộng, cũng không là cấp số nhân.

48. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai.

49. Theo giả thiết của bài ra, ta có

$$p_n = 4u_n \quad \text{và} \quad S_n = u_n^2 \qquad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), $d \neq 0$. Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$p_{n+1} - p_n = 4(u_{n+1} - u_n) = 4d \text{ không đổi.}$$

Vậy (p_n) là cấp số cộng

$S_{n+1} - S_n = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = d(u_{n+1} + u_n)$ không là hằng số (do $d \neq 0$).

Vậy (S_n) không là cấp số cộng.

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), $q > 0$. Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{4u_{n+1}}{4u_n} = q \text{ không đổi ;}$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = q^2 \text{ không đổi.}$$

Từ đó suy ra các dãy số (p_n) và (S_n) là các cấp số nhân.

50. Trước hết, bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$u_n = 3 \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hiển nhiên ta có (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3,$$

nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng với $d = 0$, đồng thời là cấp số nhân với $q = 1$.

51. a) $u_2 = u_1 + 500 = 8000 + 500 = 8500$;

$u_3 = u_2 + 500 = 8500 + 500 = 9000$.

$v_2 = v_1 + v_1 . 0{,}07 = v_1(1 + 0{,}07) = v_1 . 1{,}07 = 6000 . 1{,}07 = 6420$;

$v_3 = v_2 + v_2 . 0{,}07 = v_2(1 + 0{,}07) = v_2 . 1{,}07 = 6420 . 1{,}07 = 6869{,}4$.

b) Theo giả thiết của bài toán, ta có

$u_1 = 8000$ và $u_{n+1} = u_n + 500$ với mọi $n \geq 1$; (1)

$v_1 = 6000$ và $v_{n+1} = v_n + v_n . 0{,}07 = v_n(1 + 0{,}07) = v_n . 1{,}07$ với mọi $n \geq 1$. (2)

Từ (1) suy ra (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 500$ và số hạng đầu $u_1 = 8000$.

Số hạng tổng quát : $u_n = 8000 + (n - 1).500 = 7500 + 500n$.

Từ (2) suy ra (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1{,}07$ và số hạng đầu $v_1 = 6000$.

Số hạng tổng quát : $v_n = 6000 . (1{,}07)^{n-1}$.

c) Kí hiệu A_{20} và B_{20} tương ứng là số tiền công (tính theo đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở A và theo cách tính giá của cơ sở B. Từ kết quả phần b), ta có

A_{20} là tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n). Do đó

$$A_{20} = \frac{20.(2u_1 + 19d)}{2} = 10.\,(2\,.\,8000 + 19\,.\,500) = 255\,000.$$

B_{20} là tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n). Do đó

$$B_{20} = v_1\,.\,\frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 6000\,.\,\frac{1-(1{,}07)^{20}}{1-1{,}07} = 245\,972{,}95392...\,.$$

Từ đó, nếu cần khoan giếng sâu 20 m thì nên thuê cơ sở B.

d) Kí hiệu A_{25} và B_{25} tương ứng là số tiền công (tính theo đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở A và theo cách tính giá của cơ sở B. Bằng cách tương tự như ở phần c), ta tính được $A_{25} = 350\,000$ và $B_{25} = 379\,494{,}22629...$.

Do đó, nếu cần khoan giếng sâu 25 m thì nên thuê cơ sở A.

52. a) Sai ; b) Sai ; c) Đúng.

53. (B). **54.** (B) **55.** (A).

56. (C). **57.** (D).

VI – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 sau đây hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho :

Câu 1 (*1 điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_{n+1} = 2^n.\,u_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Ta có u_5 bằng

(A) 10 ; (B) 1024 ; (C) 2048 ; (D) 4096.

Câu 2 (*1 điểm*). Nếu cấp số cộng (u_n) với công sai d có $u_2 = 2$ và $u_{50} = 74$ thì

(A) $u_1 = 0$ và $d = 2$; (B) $u_1 = -1$ và $d = 3$;

(C) $u_1 = 0{,}5$ và $d = 1{,}5$; (D) $u_1 = -0{,}5$ và $d = 2{,}5$.

Câu 3 (*1 điểm*). Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$ bằng

(A) -511 ; (B) -1025 ; (C) 1025 ; (D) 1023.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 6 \text{ và } u_{n+1} = 3u_n - 11 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có $u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2} + \dfrac{11}{2}$.

Câu 5 *(4 điểm)*. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Hãy tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Đáp án

Câu 1. (C).

Câu 2. (C).

Câu 3. (D).

Câu 4. Ta sẽ chứng minh

$$u_n = \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{11}{2} \qquad (1)$$

với mọi $n \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 6 = \dfrac{3^{1-1}}{2} + \dfrac{11}{2}$. Như vậy (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+1} = 3u_k - 11 = 3\left(\frac{3^{k-1}}{2} + \frac{11}{2}\right) - 11 = \frac{3^k}{2} + \frac{11}{2}.$$

Vậy (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

Câu 5. Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có $33 = u_{17} = u_1 + 16d$. Suy ra $u_1 = 33 - 16d$. (1)

Do đó $65 = u_{33} = u_1 + 32d = 33 - 16d + 32d = 33 + 16d$. Suy ra $d = 2$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được $u_1 = 1$.

Từ đó $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$.

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1 (*1 điểm*). Hãy chọn phương án đúng.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Ta có u_{11} bằng

(A) 36 ; (B) 60 ; (C) 56 ; (D) 44.

Câu 2 (*2 điểm*). Với mỗi cấp số cộng (u_n) cho bởi u_1 và công sai d ở cột trái trong bảng sau đây, hãy chọn ở cột phải một kết luận đúng (trong 4 kết luận đã nêu) :

Cấp số cộng (u_n)	**Kết luận**
A) $u_1 = 1$; $d = 3$	1) $u_7 = 19$ và $u_{15} = 47$
B) $u_1 = -5$; $d = 4$	2) $u_4 = 10$ và $u_{10} = 28$
	3) $u_7 = 19$ và $u_{10} - u_5 = 20$
	4) $u_7 = 7$ và $u_3 + u_7 = 20$

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 3 (*5 điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = 2u_n + 5 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), với $v_n = u_n + 5$, là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Câu 4 (*2 điểm*). Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_{97} = 101$. Hãy tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Đáp án

Câu 1. (C).

Câu 2. A) $\rightarrow$ 2) và B) $\rightarrow$ 3).

Câu 3. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có

$$u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5) \quad \text{với mọi } n \geq 1, \quad \text{hay } v_{n+1} = 2v_n \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Suy ra (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 5 = 1 + 5 = 6$ và công sai $q = 2$. Từ đó, số hạng tổng quát của cấp số nhân (v_n) là

$$v_n = 6.\ 2^{n-1} = 3.\ 2^n.$$

b) Từ kết quả phần a), ta có số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là

$$u_n = v_n - 5 = 3.\ 2^n - 5.$$

Câu 4. Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$u_4 = u_1 + 3d$$

$$u_{97} = u_1 + 96d = u_1 + 99d - 3d = u_{100} - 3d.$$

Từ đó suy ra $\quad 101 = u_4 + u_{97} = u_1 + u_{100}.$

Do đó $\quad S_{100} = \dfrac{100.(u_1 + u_{100})}{2} = 50\ .\ 101 = 5050.$