E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (3 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

Thời gian dành cho ôn tập chương là 3 tiết, trong đó có một tiết kiểm tra. Như vậy toàn bộ lí thuyết và bài tập của chương được ôn trong 2 tiết. Giáo viên nên cho các câu hỏi và bài tập ít nhất là trước một tuần để học sinh có thời gian chuẩn bị. Trên lớp giáo viên cho học sinh chữa một số bài tập trong các bài đã cho. Sau đây là một số câu hỏi lí thuyết và bài tập có tính chất gợi ý.

Lí thuyết

1. Phát biểu các định nghĩa

a) Dãy số có giới hạn là 0, L, $+\infty$, $-\infty$;

b) Giới hạn của hàm số tại một điểm ;

c) Giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số tại một điểm ;

d) Giới hạn của hàm số khi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

2. Nêu các định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số và hàm số.

3. Nêu các quy tắc tìm giới hạn vô cực của dãy số và hàm số.

4. Định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng và trên một đoạn.

5. Phát biểu định lí và hệ quả về giá trị trung gian của hàm số liên tục.

Bài tập

1. Cho một số ví dụ về giới hạn của hàm số có dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0.\infty, \qquad \infty - \infty$$

và nêu cách giải.

2. Cho một số ví dụ về giới hạn của dãy số có dạng vô định

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad 0.\infty, \qquad \infty - \infty$$

và nêu cách giải.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

A. Các định nghĩa về giới hạn của dãy số và hàm số

1. Dãy số

• $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow$ Với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi $|u_n|$, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số dương đó.

• $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$.

• $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow$ Với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi u_n, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

• $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow$ Với mỗi số âm tuỳ ý cho trước, mọi u_n, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

2. Hàm số

• Giả sử $x_0 \in (a\,;b)$ và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a\,;b) \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

• Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0\ ;\ b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong $(x_0\ ;\ b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

• $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$,

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

được định nghĩa tương tự.

B. Các định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số và hàm số

1. Dãy số

• Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ thì

$\lim |u_n| = |L|$; $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$; $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$ (nếu $u_n \geq 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi).

• Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$, $\lim v_n = M \in \mathbb{R}$ thì

$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$; $\lim(u_n v_n) = L.M$;

$\lim(cu_n) = cL$ (c là hằng số) ; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

2. Hàm số

• Nếu $\lim f(x) = L$ ($x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) thì

$\lim |f(x)| = |L|$; $\lim \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$; $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (nếu $f(x) \geq 0$).

• Nếu $\lim f(x) = L$ và $\lim g(x) = M$ ($x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) thì

$\lim[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$; $\lim[f(x)g(x)] = L.M$;

$\lim cf(x) = cL$ (c là hằng số) ; $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

C. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

1. Dãy số. Xem quy tắc 1, quy tắc 2, quy tắc 3 trong §3.

2. Hàm số. Xem quy tắc 1, quy tắc 2 trong §6.

D. Hàm số liên tục

ĐỊNH NGHĨA

– Hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a ; b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm số f xác định trên tập hợp J, trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng, được gọi là liên tục trên J nếu nó liên tục tại mọi điểm của tập hợp đó.

– Hàm số f xác định trên đoạn $[a ; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

ĐỊNH LÍ (về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ và M là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = M$.

E. Một vài giới hạn cần nhớ

• Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

• Nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.

• Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu u_1 và công bội q ($|q| < 1$) là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

55. a) $+\infty$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\infty$; d) $+\infty$.

56. a) Nhân và chia u_n với $\sqrt{3n-1} + \sqrt{2n-1}$, ta được

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{2n-1}} \text{ ; do đó } \lim u_n = +\infty.$$

b) Chia tử và mẫu của phân thức cho 5^n, ta được

$$u_n = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = -\frac{1}{3}$.

57. a) Ta có $u_8 = u_3q^5$, q là công bội của cấp số nhân.

Thay vào đẳng thức đã cho, ta được

$$243u_3q^5 = 32u_3.$$

Vì $u_3 \neq 0$ nên

$$q^5 = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}.$$

b) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là $S = \dfrac{u_1}{1-q}$. Từ đó, ta có

$$3^5 = \frac{u_1}{1-\frac{2}{3}}; \text{ do đó } \quad u_1 = 3^4 = 81.$$

58. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1-\dfrac{1}{n+1}$.

Do đó $\quad \lim u_n = \lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

59. a) $\dfrac{3}{2}$; $\qquad$ b) $-\dfrac{1}{2}$;

c) Với mọi $x < -3$, ta có

$$\frac{x^4+1}{x^2+4x+3} = \frac{x^4+1}{x+1}.\frac{1}{x+3}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x^4+1}{x+1} = \dfrac{82}{-2} = -41 < 0$ và $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{1}{x+3} = -\infty$ nên

$$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{x^4+1}{x^2+4x+3} = +\infty.$$

d) Vì $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3} > 0$ nên

$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x+4}{4-x}} = +\infty.$$

e) Nhân tử và mẫu của phân thức với $\sqrt{8+2x}+2$, ta được

$$\frac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}} = \frac{8+2x-4}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)} = \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2} \text{ với mọi } x > -2.$$

Do đó $\quad \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2} = \dfrac{0}{4} = 0.$

f) Với mọi $x < -1$, ta có

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}=\frac{x-4}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{x-4}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}\right)=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}.$

60. Dễ thấy hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq -2$. Với $x \neq -2$, ta có

$$f(x)=\frac{x^3+8}{4(x+2)}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{4(x+2)}=\frac{x^2-2x+4}{4}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{4}=3=f(-2).$$

Vậy hàm số f liên tục tại $x=-2$, do vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$.

61. Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=2m+m+1=3m+1=f(2)$, và

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

Hàm số f liên tục tại điểm $x=2$ khi và chỉ khi

$$3m+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}.$$

62. Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ liên tục trên đoạn [1 ; 2]. Vì $f(1) = -3 < 0$ và $f(2) = 8 > 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một số thực $c \in (1 ; 2)$ sao cho $f(c) = 0$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho.

63. a) (B) ; b) (C) ; c) (A) ; d) (B).

64. a) (D) ; b) (C) ; c) (C) ; d) (C).

65. a) (B) ; b) (D) ; c) (B).

66. a) (C) ; b) (D) ; c) (A).

67. a) (C) ; b) (D) ; c) (A).

68. a)(B) ; b) (B) ; c)(D).

69. a)(A) ; b)(B) ; c)(C) ; d)(C).

70. a)(C) ; b)(D) ; c)(B).

71. (B).

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 hãy chọn phương án đúng trong bốn phương án đã cho.

Câu 1 (*1 điểm*). $\lim \dfrac{2n^3 - 5n + 3}{3n^3 - n^2}$ là

(A) 3 ; (B) $+\infty$; (C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) $\dfrac{2}{3}$.

Câu 2 (*1 điểm*). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x}$ là

(A) -2 ; (B) 2 ; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$.

Câu 3 (*1 điểm*). $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 100} + x)$ là

(A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) 100.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 (3 *điểm*). Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 10, tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là $\frac{155}{16}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đã cho.

Câu 5 *(4 điểm)*. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \left[3 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right]$; b) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 4x}$.

Đáp án

Câu 1. (D).

Câu 2. (B).

Câu 3. (A).

Câu 4. Gọi u_1 là số hạng đầu và q là công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = 10, & (1) \\ \dfrac{u_1(1-q^5)}{1-q} = \dfrac{155}{16}. & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được

$$10(1-q^5) = \frac{155}{16} \Leftrightarrow 1 - q^5 = \frac{155}{160} \Leftrightarrow q^5 = \frac{5}{160} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Thay vào (1), ta được

$$2u_1 = 10 \Leftrightarrow u_1 = 5.$$

Đáp số. $u_1 = 5, \qquad q = \frac{1}{2}$.

Câu 5

a) Ta có

$$\lim \frac{(-1)^n}{2^n} = \lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ vì } \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Do đó

$$\lim\left[3 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right] = 3.$$

b) Với $x \neq -4$, ta có

$$\frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 4x} = \frac{(x+4)(x+5)}{x(x+4)} = \frac{x+5}{x}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{x+5}{x} = \frac{-4+5}{-4} = -\frac{1}{4}$.

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3, hãy chọn phương án đúng trong bốn phương án đã cho.

Câu 1 (*1 điểm*). $\lim \frac{100n^3 + 7n - 9}{1000n^2 - n + 1}$ là

(A) $\frac{1}{10}$; (B) $-\infty$; (C) $+\infty$; (D) -9.

Câu 2 (*1 điểm*). $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{(2x+1)(3x^2-4)}{3x^3-4}}$ là

(A) 2 ; (B) -2 ; (C) $+\infty$; (D) $\sqrt{2}$.

Câu 3 (*1 điểm*). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$ là

(A) 1 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) 2.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 (4 *điểm*). Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\cos n}{3^n}\right)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+11} + x)$.

Câu 5 (3 *điểm*). Chứng minh rằng với mọi số thực $m \in (2 ; 34)$ phương trình

$$x^3 + 3x - 2 = m$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1 ; 3).

Đáp án

Câu 1. (C).

Câu 2. (D).

Câu 3. (B).

Câu 4

a) $\lim \dfrac{n+1}{n} = \lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Vì $\left|\dfrac{\cos n}{3^n}\right| \le \dfrac{1}{3^n}$ với mọi n và $\lim \dfrac{1}{3^n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\cos n}{3^n} = 0$.

Do đó

$$\lim\left(\frac{n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n}\right) = 1.$$

b) Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{x^2+11}-x$, ta được

$$\sqrt{x^2+11}+x=\frac{11}{\sqrt{x^2+11}-x}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+11}-x\right)=+\infty$ nên

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+11}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{11}{\sqrt{x^2+11}-x}=0.$$

Câu 5. Hàm số $f(x)=x^3+3x-2$ liên tục trên đoạn $[1\ ;\ 3]$. Vì $f(1)=2$, $f(3)=34$ nên theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, với mọi $m\in(2\ ;\ 34)$ tồn tại ít nhất một số thực $c\in(1\ ;\ 3)$ sao cho $f(c)=m$.

Suy ra $x=c$ là một nghiệm thuộc khoảng $(1\ ;\ 3)$ của phương trình đã cho.