E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

– Giáo viên giao cho mỗi học sinh về nhà lập bảng ôn tập chương, đồng thời giao một số bài tập làm ở nhà (trích trong các bài ôn tập chương).

Bảng 1. Định nghĩa các khái niệm quan trọng ;

Bảng 2. Các quy tắc tính đạo hàm ;

Bảng 3. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp.

– Ở lớp, giáo viên kiểm tra sự chuẩn bị của học sinh ở nhà. Sau đó, chữa một số bài tập mà các em đã chuẩn bị ở nhà, đồng thời dành nhiều thời gian làm bài tập ở lớp.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Định nghĩa đạo hàm

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

hay

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

• Vi phân của hàm số tại một điểm

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

• Vi phân của hàm số

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

• Đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

• Ý nghĩa hình học của đạo hàm

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\,;f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

• Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $s = s(t)$. Ta có

+ Vận tốc tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$;

+ Gia tốc tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = s''(t_0)$.

• Các bảng tóm tắt cần nhớ

Các quy tắc tính đạo hàm	**Đạo hàm của một số hàm số** (ở đây $u = u(x)$)
$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$ $(\sin u)' = (\cos u).u'$ $(\cos u)' = (-\sin u).u'$ $(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'$ $(\cot u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}.u'$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

49. a) $2x^3 + 5x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$; b) $\dfrac{x^2 - 2x + a^2 - 3}{(x-1)^2}$;

c) $x^2\sin x$; d) $2\left(\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{x}{\cos^2 x^2}\right)$.

50. Nhận xét : Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ đúng với mọi giá trị nguyên của n (chú ý rằng khi $n \le 0$ thì chỉ có thể xét đạo hàm trên $(-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$).

51. a) $-\cos x$; b) $128\cos 4x - 648\cos 6x$;

Gợi ý. Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x).$$

c) $y' = -5(4-x)^4$; $\quad y'' = 20(4-x)^3$; $\quad y''' = -60(4-x)^2$;

$y^{(4)} = 120(4-x)$; $\quad y^{(5)} = -120$; $\quad y^{(n)} = 0 \ (\forall n \geq 6)$.

d) $\dfrac{(-1)^n . n!}{(2+x)^{n+1}}$; $\quad$ e) $\dfrac{(-1)^n . n!2^n}{(2x+1)^{n+1}}$; $\quad$ f) $(-1)^n . 2^{2n-1} . \cos 2x$.

Gợi ý. Ta có $\quad y' = -\sin 2x$; $\quad y'' = -2\cos 2x$; $\quad y''' = 2^2\sin 2x$;

$y^{(4)} = 2^3\cos 2x$; $\quad y^{(5)} = -2^4\sin 2x$; $\quad y^{(6)} = -2^5\cos 2x$;...

Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$y^{(2n)} = (-1)^n . 2^{2n-1}\cos 2x.$$

52. Ta có

$$\mathrm{d} f(x) = \frac{-2(1+\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^4}\Delta x = \frac{-2\Delta x}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}.$$

Suy ra

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2 . \dfrac{\pi}{360}}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}\left(1+\tan\dfrac{\pi}{6}\right)^3} = \frac{-\pi}{180 . \dfrac{3}{4}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} \approx -0{,}0059.$$

53. a) $y = 2(4x-3)$ và $y = -2(4x+3)$.

b) $y = -1$.

c) Do $\quad y = x^4 + 2x^2 - 1$, ta có $\quad y' = 4x^3 + 4x$.

Vì tiếp tuyến phải tìm vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{8}x + 3$, nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 8, suy ra

$$y' = 8 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Theo câu a), ta được phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = 2(4x - 3).$$

d) *Cách 1*. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0\,;f(x_0))$ của đồ thị (C) là

$$y = f'(x_0)\,.\,(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\ y = (4x_0^3 + 4x_0)(x - x_0) + x_0^4 + 2x_0^2 - 1.$$

Vì tiếp tuyến phải tìm đi qua điểm A $(0\,;-6)$ nên ta có

$$-6 = (4x_0^3 + 4x_0)(0 - x_0) + x_0^4 + 2x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow\ 3x_0^4 + 2x_0^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

Theo câu a) phương trình của hai tiếp tuyến phải tìm lần lượt là

$$y = 2(4x - 3) \text{ và } y = -2(4x + 3).$$

Cách 2. Phương trình đường thẳng (l) đi qua điểm A$(0\,;-6)$ với hệ số góc bằng k là

$$y = kx - 6.$$

Để đường thẳng (l) là tiếp tuyến của đồ thị (C) (hay tiếp xúc với đồ thị (C)) thì ta phải tìm k sao cho

$$\begin{cases} f(x) = kx - 6 \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 - 1 = kx - 6 \\ 4x^3 + 4x = k. \end{cases}$$

Khử k từ hệ trên ta được

$$3x^4 + 2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Suy ra $k = \pm 8$.

Vậy hai tiếp tuyến phải tìm có phương trình là

$$y = 2(4x - 3) \text{ và } y = -2(4x + 3).$$

54. Với mọi $x \neq 1$, ta có

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $M_0\left(x_0\,;\dfrac{1}{x_0 - 1}\right)$ (với $x_0 \neq 1$) là

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{1}{x_0 - 1}.$$

Tiếp tuyến này cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ x_A thoả mãn

$$\frac{x_A - x_0}{(x_0 - 1)^2} = \frac{1}{x_0 - 1} \Leftrightarrow x_A = 2x_0 - 1,$$

và cắt trục tung tại điểm B có tung độ y_B là

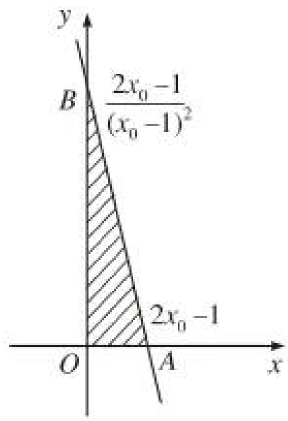
$$y_B = \frac{x_0}{(x_0 - 1)^2} + \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}.$$

Theo bài ra ta có (h. 5.14).

$$S_{OAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x_A|.|y_B| = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x_0 - 1)^2}{(x_0 - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4}.$$

Suy ra $y_0 = \dfrac{1}{\dfrac{3}{4} - 1} = -4$. Vậy điểm phải tìm M_0 có toạ độ là $\left(\dfrac{3}{4}\,;-4\right)$.



Hình 5.14

55. *Cách 1*. Đa thức phải tìm có dạng

$$P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Ta có

$$P'(x) = 2ax + b.$$

Vì trục đối xứng (Δ) có phương trình $x = 1$ nên

$$-\frac{b}{2a} = 1. \quad (1)$$

Vì đồ thị ($\mathcal{P}$) đi qua điểm $A(3\,;0)$ nên ta có $P(3) = 0$, tức là

$$9a + 3b + c = 0. \quad (2)$$

Vì hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $A(3\,;0)$ bằng $\tan\frac{\pi}{4}$ nên ta có $P'(3) = 1$, tức là

$$6a + b = 1. \quad (3)$$

Giải hệ ba phương trình (1), (2) và (3) với ba ẩn số a, b và c, ta được

$$a = \frac{1}{4}\,; \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad \text{và} \qquad c = -\frac{3}{4}.$$

Vậy $$P(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Cách 2. Vì đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng nên đa thức $P(x)$ có dạng

$$P(x) = a(x-1)^2 + m.$$

Vì $P(3) = 0$ nên $4a + m = 0$.

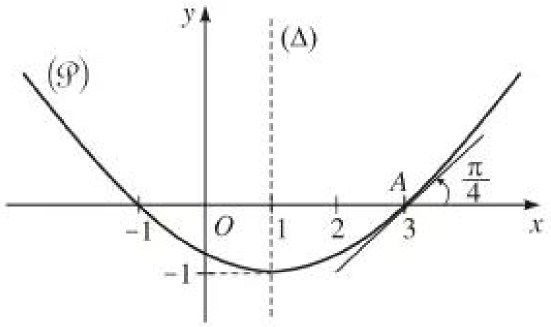
Vì $P'(3) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ nên

$2a(3-1) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

Thế vào (4), ta được $m = -1$.

Vậy $P(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$.

Đồ thị $(\mathscr{P})$ là (h. 5.15).



Hình 5.15

56. Các điểm M_1 và M_2 có toạ độ là $M_1(-2\,;\,4)$; $M_2(1\,;\,1)$. (h. 5.16).

Hệ số góc của cát tuyến M_1M_2 là $\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{-2-1} = -1$.

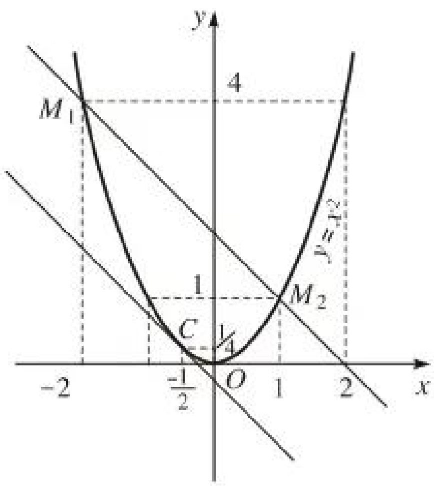
Vì tiếp tuyến tại điểm $C(x_0\,;x_0^2)$ song song với cát tuyến M_1M_2 nên ta có

$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-1}{2}$,

suy ra toạ độ của điểm C là $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$y = (-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ hay $y = -x - \frac{1}{4}$.



Hình 5.16

57. a) -9m/s ; b) 12m/s^2 ;

c) 12m/s^2 ; d) -12m/s.

58. a) Đúng ; b) Sai ; c) Sai.

59. (A). Chỉ cần chú ý rằng $y(-1) = -2$ và $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$.

60. (C). Chỉ cần chú ý rằng $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ và $y' = \dfrac{-1}{2x\sqrt{2x}} < 0$ với mọi $x > 0$.

61. (B).

62. (D). Tổng quát, vì $(\cos x)^{(4n)} = \cos x$ nên $(\cos x)^{(4n+2)} = (\cos x)'' = -\cos x$.

63. a) $\cot\sqrt{x}$; b) $(\sin x + \cos x)^n$; c) $\tan u$ và $3x$; d) $\sqrt{u}$ và $\cos x$.

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ I

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho trong các câu từ 1 đến 3 sau đây :

Câu 1 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} \text{ với } x < 0.$$

Khi đó

(A) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x^3(x-3)}}$; (B) $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}}$;

(C) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}}$; (D) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}}$.

Câu 2 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = x^2\cos x.$$

Khi đó

(A) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; (B) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$;

(C) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$; (D) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$.

Câu 3 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = \sqrt{\cos 2x}.$$

Khi đó

(A) $\mathrm{d}f(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$; (B) $\mathrm{d}f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}\mathrm{d}x$;

(C) $\mathrm{d}f(x) = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$; (D) $\mathrm{d}f(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}\mathrm{d}x$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 (*3 điểm*).

a) Cho hàm số $f(x) = (3 - x^2)^{10}$. Tính $f''(x)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x + \tan^4 x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-3}.

Câu 5 (*4 điểm*). Cho hàm số

$$y = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết :

a) Hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$;

b) Tiếp tuyến đi qua điểm $A\ (0\ ;\ 2)$.

Đáp án

Câu 1. (A).

Câu 2. (B).

Câu 3. (D).

Câu 4. a) Ta có

$$f'(x) = -20x(3-x^2)^9,$$

$$f''(x) = -20[(3-x^2)^9 + 9x(3-x^2)^8.(-2x)] = -20(3-x^2)^8(3-x^2-18x^2).$$

Vậy $$f''(x) = 20(19x^2-3)(3-x^2)^8.$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^4 x}}\left[2\tan x \,.\, \dfrac{1}{\cos^2 x} + 4\tan^3 x \,.\, \dfrac{1}{\cos^2 x}\right].$

Với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $\tan x = 1$ và $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ nên

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2.2+4.2) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464.$$

Câu 5

Ta có

$$y' = \frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \quad (x \neq -2).$$

a) Với $x_0 = 0$ thì $y(0) = -\dfrac{1}{2}$ và $y'(0) = \dfrac{5}{4}$. Vậy phương trình tiếp tuyến phải tìm là $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0\,;2)$ với hệ số góc bằng k là

$$y = kx + 2. \qquad (1)$$

Để (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ thì ta phải tìm k sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+2} = kx+2, \\ \dfrac{5}{(x+2)^2} = k. \end{cases}$$

Khử k, ta được $x = -1$; suy ra $k = 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến phải tìm là $y = 5x + 2$.

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho trong các câu từ 1 đến 3 sau đây :

Câu 1 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + a^3 \text{ (}a\text{ là tham số khác 0).}$$

Khi đó

(A) $f'(a^2) = 3a^2$; (B) $f'(a^2) = -a^3$;

(C) $f'(a^2) = |a|^3$; (D) $f'(a^2) = a^3 + 3a^2$.

Câu 2 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = \cos^2 x - \tan^2 3x.$$

Khi đó

(A) $f'(x) = 2\cos x - 2\tan 3x$; (B) $f'(x) = \sin 2x - \frac{2\tan 3x}{\cos^2 3x}$;

(C) $f'(x) = -\sin 2x - \frac{6\tan 3x}{\cos^2 x}$; (D) $f'(x) = -\sin 2x - 6\frac{\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

Câu 3 (*1 điểm*). Cho hàm số

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 1. \quad (1)$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại tiếp điểm M có hoành độ bằng 1 có phương trình là

(A) $y = -\frac{1}{6}$; (B) $y = -x + \frac{5}{6}$;

(C) $y = -x - \frac{1}{6}$; (D) $y = -x - \frac{7}{6}$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 (*4 điểm*)

a) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 3x}}$. Tính $f'(x)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Tính $f^{(n)}(x)$ với mọi $n \geq 2$.

Câu 5 (*3 điểm*). Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là

$$s = 2t^3 - 2t^2 + t - 1,$$

(s tính theo mét (m) và t tính theo giây (s)).

a) Tính gia tốc tại thời điểm $t = 4$ (giây) ;

b) Tính vận tốc tại thời điểm mà gia tốc bằng 0 ($\mathrm{m/s^2}$).

Đáp án

Câu 1. (C).

Câu 2. (D).

Câu 3. (B).

Câu 4

a) Ta có

$$f'(x) = -\frac{\left(\sqrt{1 + \cos^2 3x}\right)'}{1 + \cos^2 3x} = -\frac{2\cos 3x(-3\sin 3x)}{(1 + \cos^2 3x).2\sqrt{1 + \cos^2 3x}}$$
$$= \frac{3\sin 6x}{2\sqrt{(1 + \cos^2 3x)^3}}.$$

b) Ta có

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Suy ra

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2},$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2!}{x^3},$$

$$f'''(x) = -2.\frac{-3x^2}{x^6} = \frac{3!}{x^4},$$

$$f^{(4)}(x) = 3!\frac{-4x^3}{x^8} = -\frac{4!}{x^5}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{x^{n+1}} \text{ (với mọi } n \geq 2).$$

Câu 5

Ta có

$$s'(t) = v(t) = 6t^2 - 4t + 1,$$

$$s''(t) = a(t) = 12t - 4 = 4(3t - 1).$$

a) Ta có

$$a(4) = 4 . 11 = 44(\mathrm{m/s^2}).$$

b) Ta có

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow 4(3t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Vậy $$v\left(\frac{1}{3}\right) = 6.\frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3}(\mathrm{m/s}).$$