GỢI Ý ÔN TẬP CUỐI NĂM (3 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CUỐI NĂM

Theo quy định, việc ôn tập và kiểm tra cuối năm được thực hiện trong 3 tiết, trong đó phải dành 1 tiết cho kiểm tra (cùng với hình học). Do đó việc ôn tập chỉ còn lại 2 tiết. Với thời gian đó, không thể ôn tập mọi vấn đề trong chương trình. Trong 2 tiết ôn tập, giáo viên nên dành chủ yếu cho việc hướng dẫn giải bài tập ; thông qua đó mà phát hiện các lỗ hổng kiến thức của học sinh và kịp thời khắc phục.

Trong SGK đã cho 25 bài tập ôn tập cuối năm. Đây là các bài tập được chọn lọc phù hợp với yêu cầu của chương trình, bao quát được hầu hết các kiến thức cần thiết và không quá khó. Giáo viên nên yêu cầu học sinh làm tất cả các bài tập này ở nhà. Trên lớp, tuỳ theo trình độ, năng lực, điều kiện của học sinh mà giáo viên lựa chọn nội dung của tiết học cũng như các bài tập cần chữa cho học sinh.

II – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. *Gợi ý.* $2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos\frac{\pi}{4}$.

b) $\sin x + (\sqrt{2}-1)\cos x = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\,\cos\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)$.

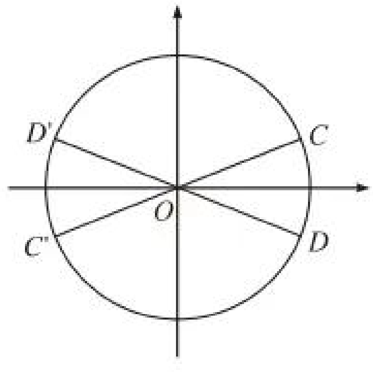
Vậy $C = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$. *Gợi ý.* Sử dụng kết quả phần a) chú ý rằng

$\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{8}$ và

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$.

2. $\tan x = \cot 2x \Leftrightarrow \cos 3x = 0$ với điều kiện $\cos x \sin 2x \neq 0$. Ta có các nghiệm

$\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $-\frac{\pi}{6} + k\pi$. Các nghiệm được biểu diễn thành bốn điểm C, C', D, D' như hình 1.



Hình 1

3. a) $P(x) = 2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -2\sqrt{2}$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\frac{3\pi}{4}$).

Vậy $\min P(x) = -2\sqrt{2}$.

b) $Q(x) = \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = \pm\frac{3\pi}{4}$).

Vậy $\min Q(x) = 4$.

c) $R(x) = P(x) + Q(x) \geq 4 - 2\sqrt{2}$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\frac{3\pi}{4}$).

Vậy $\min R(x) = 4 - 2\sqrt{2}$.

4. a) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$.

Gợi ý. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Gợi ý. $\sin^2 2x - \sin^2 x = (1 - \cos^2 2x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$= -\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

c) $x = k\frac{\pi}{2}$. *Gợi ý.* $\cos 3x = \cos(x + 2x)$.

d) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $x = k\pi$.

Gợi ý. $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = \tan 2x\,(1 - \cos 2x) - (1 - \cos 2x)$

$$= (\tan 2x - 1)(1 - \cos 2x).$$

5. a) $x = \pm a - 40^\circ + k360^\circ$ với $\cos a = -\frac{3}{4}$.

b) $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4}$.

Gợi ý. $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\sin 5x\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 5x\right)$.

c) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan 2 + k\pi$.

6. a) $x = k2\pi$. *Gợi ý.* Đặt $y = \dfrac{1}{\cos x}$, ta có $2y^2 - 3y + 1 = 0$.

b) $x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. *Gợi ý.* $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$.

c) $x = k\dfrac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$, k không chia hết cho 3).

7. a) $3! = 6$ khả năng. *Gợi ý.* Mỗi cách xếp 3 người vào 3 toa, mỗi toa một người là một hoán vị của tập hợp 3 hành khách.

b) Có $C_3^2 = 3$ cách chọn hai hành khách đi chung toa. Với mỗi cách ấy lại có 3 cách chọn toa tàu cho họ. Vậy có $3 \,.\, 3 = 9$ cách chọn hai hành khách và toa tàu cho họ đi chung. Mỗi cách ấy, hành khách thứ ba có thể chọn một trong hai toa tàu còn lại. Áp dụng quy tắc nhân, ta có $9 \,.\, 2 = 18$ khả năng có thể xảy ra.

8. $\dfrac{n(n-1)}{2}$. *Gợi ý.* Với hai phần tử x và y của A sao cho $x > y$, ta chỉ lập được một cặp duy nhất (x, y) thoả mãn đề bài. Do đó mỗi cặp như vậy có thể xem là một tổ hợp chập 2 của n phần tử.

9. a) Số trường hợp có thể là C_{16}^2. Số trường hợp rút được cả hai viên bi đen là C_6^2. Do đó xác suất để rút được 2 viên bi đen là $\dfrac{C_6^2}{C_{16}^2} = \dfrac{1}{8}$. Số trường hợp rút được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen là $C_7^1.C_6^1 = 42$. Do đó xác suất rút được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen là $\dfrac{42}{C_{16}^2} = \dfrac{7}{20}$.

b) Số trường hợp có thể là C_{16}^3. Số trường hợp rút được 3 viên bi đỏ là $C_3^3 = 1$. Vậy xác suất rút được 3 viên bi đỏ là $\frac{1}{C_{16}^3} = \frac{1}{560}$. Theo quy tắc nhân, ta có $7 . 6 . 3 = 126$ cách chọn 3 viên bi có 3 màu khác nhau. Vậy xác suất rút được 3 viên bi có 3 màu khác nhau là $\frac{126}{C_{16}^3} = \frac{9}{40}$.

10. a) $E(X) = 5{,}96$.

b) Điểm trung bình khi vận động viên đó bắn 48 lần là $48 . 5{,}96 = 286{,}08$.

11. b) *Gợi ý*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp, sử dụng công thức

$$\cos^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi}{2^n}\right).$$

12. a) *Gợi ý*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

b) *Gợi ý*. Dựa vào kết quả phần a), xét hiện $u_{n+1} - u_n$.

13. Để ý rằng (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công sai $d = -2$, ta được

a) $u_n = 7 - 2n$;

b) $S_{100} = -9400$.

14. Để ý rằng (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$, ta được

a) $u_n = 2.3^{n-1}$;

b) $S_{10} = 3^{10} - 1$.

15. $(x ; y) = (3 ; 1)$, $(x ; y) = \left(-\frac{6}{13} ; -\frac{2}{13}\right)$.

Gợi ý. Dựa vào định lí 1, §3 và định lí 1, §4, chương IV ta lập hệ phương trình nhận $(x ; y)$ làm nghiệm, rồi giải hệ đó.

16. a) 1 ; b) 0 ;

c) $+\infty$. *Gợi ý*. Chia cả tử và mẫu cho n.

d) $-\frac{8}{5}$. *Gợi ý*. Chia cả tử và mẫu cho 7^n.

17. a) $+\infty$; b) $-\infty$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}$

$$=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\dfrac{1}{2}.$$

d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}{2}=1.$

18. $u_1=12$; $q=\dfrac{1}{5}$ hoặc $u_1=3$; $q=\dfrac{4}{5}$.

Gợi ý. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} qu_1=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{u_1}{1-q}=15 \end{cases}$$ (ẩn là q và u_1 với $|q|<1$).

19. a) 2 ; b) $\dfrac{1}{10}$; c) 1 ; d) 0 ;

e) Với mọi $x<0$, ta có $\dfrac{1}{x}\sqrt{2x^4+4x^2+3}=-\sqrt{2x^2+4+\dfrac{3}{x^2}}$. Do đó

$$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2+\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{2x^2+4+\dfrac{3}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}=-\infty.$$

f) $\sqrt{2}$. *Gợi ý*. Với mọi $x>0$, ta có $(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x}}=\sqrt{\dfrac{(2x+1)^2(x+1)}{2x^3+x}}$.

g) $+\infty$.

h) 0. *Gợi ý.* $\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}=\dfrac{1}{\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{5}}$.

i) 2. *Gợi ý* . $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}$.

20. Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên có số $\alpha<0$ sao cho $f(\alpha)<0$. Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên có số $\beta>0$ sao cho $f(\beta)>0$. Hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$ chứa đoạn $[\alpha\,;\beta]$ nên theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại số $d\in[\alpha\,;\beta]$ sao cho $f(d)=0$. Đó chính là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

21. a) $y'=\left[\dfrac{a}{a+b}x^2+\dfrac{b}{a+b}x+\dfrac{c}{(a+b)x}\right]'$

$$=\frac{2a}{a+b}x+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}=\frac{2ax^3+bx^2-c}{(a+b)x^2}.$$

b) $y'=4\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}+3\right)^3\left(3x^2+\dfrac{3}{x^4}\right)=12\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}+3\right)^3\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)$.

c) $y'=3x^2\cos^2x-x^3\sin 2x=x^2(3\cos^2x-x\sin 2x)$.

d) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}\cos\sqrt{4+x^2}$.

e) $y'=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}=\dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$.

22. a) $m=\dfrac{1}{3}$.

Gợi ý. Ta có $y'=3mx^2+2x+1$ là bình phương của một nhị thức bậc nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}3m>0,\\ \Delta'=1-3m=0.\end{cases}$

b) $m < 0$.

c) $m > \dfrac{1}{3}$.

Gợi ý. Yêu cầu của đầu bài không thoả mãn nếu $m = 0$. Với $m \neq 0$, ta có

$y' > 0$ với mọi x khi và chỉ khi $\begin{cases} 3m > 0, \\ \Delta' = 1 - 3m < 0. \end{cases}$

23. a) $x = \pi + k2\pi$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Gợi ý. Ta có $y' = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

b) $x = k\dfrac{2\pi}{3}$; $x = \dfrac{2\alpha}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$ với $\tan\alpha = 2$.

Gợi ý. Ta có $y' = 3\cos 3x + 6\sin 3x - 3$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + 2\sin 3x = 1$. Đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 3x$ và $\cos 3x$.

24. Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

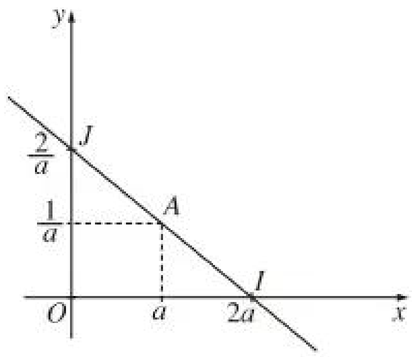
a) Phương trình tiếp tuyến (T) tại điểm $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ là

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} \text{ hay } y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

b) Ta nhận thấy $I(2a\,;0)$, $J\left(0\,;\dfrac{2}{a}\right)$.

Kiểm tra dễ dàng rằng điểm $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng IJ.

Từ đó suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T) : Đó là đường thẳng IJ (h. 2).



Hình 2

c) Diện tích tam giác OIJ là

$$S = \frac{1}{2}|OI|.|OJ| = \frac{1}{2}\left|2a.\frac{2}{a}\right| = 2 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Vì S không phụ thuộc vào a nên diện tích tam giác OIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm $A \in (\mathcal{H})$.

25. Người quan sát thấy được điểm M nếu M thuộc phần parabol nằm trong góc tạo bởi hai tiếp tuyến của parabol đi qua $P(2\,;\,0)$. Điều đó tương đương với bất đẳng thức kép $a_1 \le m \le a_2$; trong đó m là hoành độ của điểm M, a_1 và a_2 là hoành độ hai tiếp điểm. Ta cần xác định a_1 và a_2.

Cách 1. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$y' = -2x + 17.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại tiếp điểm $M_0(a\,;\,-a^2 + 17a - 66)$ là

$$y = (-2a + 17)(x - a) + (-a^2 + 17a - 66),$$

hay $$y = (-2a + 17)x + a^2 - 66.$$

Vì tiếp tuyến đi qua $P(2\,;\,0)$ nên ta có

$$0 = (-2a + 17).2 + a^2 - 66,$$

hay $a^2 - 4a - 32 = 0$. Suy ra $a_1 = -4$ và $a_2 = 8$.

Vậy người quan sát có thể nhìn được các điểm M thuộc parabol đã cho nếu hoành độ của M thuộc đoạn $[-4\,;\,8]$.

Cách 2. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $P(2\,;\,0)$ với hệ số góc bằng k là

$$y = k(x - 2).$$

Để (d) là tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 17x - 66$ thì ta phải có

$$\begin{cases} -x^2 + 17x - 66 = k(x - 2), \\ -2x + 17 = k. \end{cases}$$

Khử k, ta được

$$x^2 - 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 8. \end{array}\right.$$

(x_1 và x_2 chính là hai hoành độ tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ $P(2\,;\,0)$ đến parabol đã cho).

Vậy người quan sát có thể nhìn được các điểm M thuộc parabol đã cho, nếu hoành độ điểm M thuộc đoạn $[-4\,;\,8]$.