LUYỆN TẬP (2 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

• Các bài tập của phần này được biên soạn nhằm giúp học sinh

– Ôn luyện các kiến thức, kĩ năng đã được đề cập ở các bài học trước ;

– Rèn luyện khả năng tổng hợp các kiến thức đã biết.

• Ngoài các mục đích chính trên đây, bài tập 43 (cùng với ví dụ 2 §4) còn nhằm kích thích học sinh tìm hiểu mối liên hệ giữa các cấp số nhân và các dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính cấp một.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

• *Đối với các học sinh khá, giỏi*, trên cơ sở bài tập 43 (và ví dụ 2 §4), giáo viên nên hướng dẫn hoặc yêu cầu học sinh tìm tòi, khám phá mối liên hệ giữa cấp số nhân và dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính cấp một. Từ đó, kết hợp với các kiến thức đã biết về cấp số cộng và cấp số nhân tìm ra phương pháp tìm số hạng tổng quát của các dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính cấp một.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

38. Có duy nhất khẳng định đúng : Khẳng định b).

39. Vì các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên

$$2(5x + 2y) = (x + 6y) + (8x + y) \quad \text{hay} \quad x = 3y. \tag{1}$$

Vì các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên

$$(y + 2)^2 = (x - 1)(x - 3y). \tag{2}$$

Thế (1) vào (2), ta được $(y + 2)^2 = 0$ hay $y = -2$. Từ đó $x = -6$.

40. Vì cấp số cộng (u_n) có công sai khác 0 nên các số u_1, u_2, u_3 đôi một khác nhau. Suy ra $u_1.u_2 \neq 0$ vì nếu ngược lại thì ít nhất hai trong ba số u_1, u_2, u_3 bằng 0. Từ đó $q \neq 1$.

Ta có $u_2u_3 = u_1u_2.q$ và $u_3u_1 = u_1u_2.q^2$.

Suy ra $u_3 = u_1q = u_2q^2$ (vì $u_1u_2 \neq 0$). Do đó $u_1 = u_2q$ (vì $q \neq 0$ theo giả thiết).

Vì u_1, u_2, u_3 là một cấp số cộng nên $u_1 + u_3 = 2u_2$.

Từ các kết quả trên, suy ra

$$u_2(q + q^2) = 2u_2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0 \text{ (vì } u_2 \neq 0) \Leftrightarrow q = -2 \text{ (vì } q \neq 1).$$

41. Kí hiệu (u_n) là cấp số cộng nói trong đề bài, và gọi q là công bội của cấp số nhân u_2, u_1, u_3. Theo bài ra, ta cần tính q.

Vì cấp số cộng (u_n) có công sai khác 0 nên các số u_1, u_2, u_3 đôi một khác nhau. Suy ra $q \notin \{0, 1\}$ và $u_2 \neq 0$.

Từ các giả thiết của bài ra, ta có $u_1 = u_2q$, $u_3 = u_2q^2$ và $u_1 + u_3 = 2u_2$. Suy ra

$$u_2(q + q^2) = 2u_2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0 \text{ (vì } u_2 \neq 0) \Leftrightarrow q = -2 \text{ (vì } q \neq 1).$$

42. Kí hiệu u_1, u_2, u_3 lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ ba của cấp số nhân nói trong đề bài ; gọi q là công bội của cấp số nhân đó.

Gọi d là công sai của cấp số cộng nhận u_1, u_2 và u_3 tương ứng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám.

Dễ thấy $u_1 \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $u_2 = u_3 = 0$, và do đó $u_1 + u_2 + u_3 = 0 \neq \dfrac{148}{9}$.

Từ các giả thiết của đề bài ta có : $u_2 = u_1q = u_1 + 3d$ và $u_3 = u_2q = u_2 + 4d$.

Suy ra
$$u_1(q-1) = 3d, \qquad (1)$$
$$u_2(q-1) = 4d. \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp sau :

Trường hợp 1. $q \neq 1$. Khi đó, từ (1) và (2) suy ra $d \neq 0$ (do $u_1 \neq 0$) và $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{3}$.

Từ đó

$$\frac{148}{9} = u_1 + u_2 + u_3 = u_1 \,.\, \frac{1 - q^3}{1 - q} = u_1 \,.\, \frac{1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^3}{1 - \dfrac{4}{3}} = u_1 \,.\, \frac{37}{9} \Rightarrow u_1 = 4.$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1q = \frac{16}{3} \Rightarrow u_3 = u_2q = \frac{64}{9}.$$

Dễ thấy ba số vừa tìm được ở trên là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng có công sai $d = \frac{4}{9}$.

Trường hợp 2. $q = 1$. Khi đó $u_1 = u_2 = u_3$. Vì thế $\frac{148}{9} = 3u_1$. Suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{148}{27}$.

Hiển nhiên ba số vừa tìm được ở trên là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d = 0$.

Vậy, có hai bộ ba số cần tìm là

$$u_1 = 4,\ u_2 = \frac{16}{3},\ u_3 = \frac{64}{9} \text{ và } u_1 = u_2 = u_3 = \frac{148}{27}.$$

43. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $n \geq 1$, ta có

$$u_{n+1} + 2 = 5(u_n + 2) \quad \text{hay} \quad v_{n+1} = 5v_n.$$

Do đó (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 2 = 3$ và công bội $q = 5$.

Số hạng tổng quát $v_n = 3 \,.\, 5^{n-1}$.

b) $u_n = v_n - 2 = 3 \,.\, 5^{n-1} - 2$ với mọi $n \geq 1$.