LUYỆN TẬP (2 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

Bài này nhằm củng cố các kiến thức và các kĩ năng trong ba bài §1, §2, §3 về các vấn đề sau :

– Tìm giới hạn (hữu hạn và vô cực) của các dãy số ;

– Tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Cần chữa hết các bài tập 16, 17, 18, 19, cân nhắc về thời gian khi chữa bài tập 20.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

16. a) 0 ; b) $+\infty$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\dfrac{2}{3}$.

17. a) $+\infty$; b) $+\infty$. c) $-\infty$;

d) $\sqrt{2.3^n - n + 2} = \left(\sqrt{3}\right)^n \sqrt{2 - \dfrac{n}{3^n} + \dfrac{2}{3^n}}$ với mọi n.

Vì $\lim \dfrac{n}{3^n} = 0$ (xem bài tập 4) và $\lim \dfrac{2}{3^n} = 0$ nên $\lim \sqrt{2 - \dfrac{n}{3^n} + \dfrac{2}{3^n}} = \sqrt{2} > 0$.

Ngoài ra $\lim \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$. Do đó $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2} = +\infty$.

18. a) Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n^2 + n + 1} + n$, ta được

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + 1} \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Nhân tử và mẫu của biểu thức đã cho với $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{n + 2 - (n+1)} = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = +\infty$.

c) $+\infty$;

Gợi ý. c) $\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$,

$\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1>0$.

d) 0 ;

e) Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, ta được

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n=\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Vì $\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$ và $\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}>0$ với mọi n, nên

$$\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n=+\infty.$$

Cách khác

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n=\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$ nên $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n=+\infty$.

f) $\frac{1}{3}$.

19. Ta có

$$\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{5}{3}, & (1)\\[2ex] \dfrac{u_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{39}{25}. & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được

$$\frac{5}{3}(1-q^3)=\frac{39}{25}\Leftrightarrow q=\frac{2}{5}.$$

Thay vào (1), ta được $u_1=1$.

20. a) Số cạnh của H_n là 3.4^n. Độ dài mỗi cạnh của H_n là $\dfrac{a}{3^n}$. Do đó độ dài của H_n là $p_n = 3.4^n.\dfrac{a}{3^n} = 3a\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. Vậy dãy số (p_n) là một cấp số nhân và $\lim p_n = +\infty$.

b) Diện tích tam giác ABC cạnh a là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$S_1 - S = 3.\left(\frac{S}{9}\right) = \frac{S}{3},$$

$$S_2 - S_1 = 4.3.\left(\frac{S}{9^2}\right) = \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right),$$

$$S_3 - S_2 = 4^2.3.\left(\frac{S}{9^3}\right) = \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta được

$$S_n - S_{n-1} = 4^{n-1}.3.\left(\frac{S}{9^n}\right) = \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên, ta được

$$S_n - S = \frac{S}{3} + \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}. \qquad (1)$$

Vế phải của (1) là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $\dfrac{S}{3}$ và công bội là $\dfrac{4}{9}$. Tổng của cấp số nhân này là

$$\left(\frac{S}{3}\right).\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3S}{5}.$$

Do đó

$$\lim (S_n - S) = \frac{3S}{5}, \text{ suy ra}$$

$$\lim S_n = \frac{3S}{5} + S = \frac{8S}{5} = \frac{8}{5}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2.$$