# LUYỆN TẬP (1 tiết)

## I – MỤC ĐÍCH

Củng cố kiến thức : Định nghĩa đạo hàm tại một điểm, cách tính đạo hàm của hàm số tại một điểm theo định nghĩa, đạo hàm của hàm số trên một khoảng (hay hợp của những khoảng), ý nghĩa của đạo hàm.

## II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Giáo viên không nhất thiết buộc học sinh phải làm hết các bài tập trong sách. Tuỳ theo tình hình lớp học mà lựa chọn các bài tập cho thích hợp. Đối với các lớp học sinh khá và giỏi, có thể cho học sinh làm thêm bài tập trong sách bài tập và các tài liệu tham khảo khác.

Các bài tập 11, 12 và 15 có thể cho học sinh làm và trả lời ngay tại lớp.

## III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**10.** a) $f'(3) = 27$, $f'(-4) = 48$ ; b) $f'(1) = \frac{1}{2}$ ; $f'(9) = \frac{1}{6}$.

**11.** a) Mệnh đề sai vì tiếp tuyến có thể trùng với trục hoành.

*Ví dụ*. Cho hàm số $f(x) = x^2$ với $x_0 = 0$ thì $f'(0) = 0$ và tiếp tuyến tại điểm $O(0 ; 0)$ trùng với trục hoành.

Mệnh đề sau đây mới đúng : "Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tồn tại tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song hoặc trùng với trục hoành".

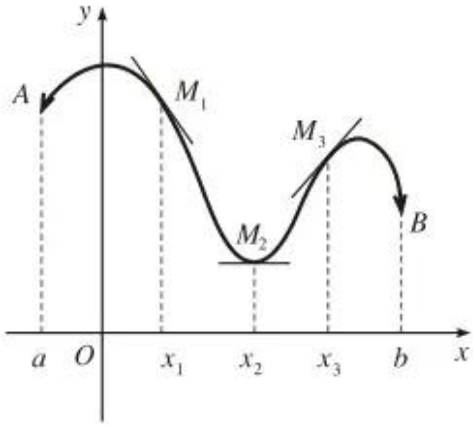
b) Mệnh đề đúng ; vì nếu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ song song với trục hoành thì hệ số góc của tiếp tuyến phải bằng 0, suy ra $f'(x_0) = 0$.

**12.** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại các điểm $M_1$, $M_2$ và $M_3$ (h. 5.6), nên hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại các điểm $x_1$, $x_2$ và $x_3$. Ta nhận thấy :

+ Tiếp tuyến tại điểm $M_1$ là một đường thẳng "đi xuống" từ trái sang phải, nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số âm, suy ra $f'(x_1) < 0$.

+ Tiếp tuyến tại điểm $M_2$ là một đường thẳng song song với trục hoành, nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 0, suy ra $f'(x_2) = 0$.

+ Tiếp tuyến tại điểm $M_3$ là một đường thẳng "đi lên" từ trái sang phải, nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số dương, suy ra $f'(x_3) > 0$.




*Hình 5.6*

**13.** Đường thẳng $(d) : y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị $(G)$ của hàm số $f$ tại điểm $(x_0 ; f(x_0))$ khi và chỉ khi đồng thời xảy ra :

- $(d)$ và $(G)$ cùng đi qua điểm $(x_0 ; f(x_0))$, tức là $ax_0 + b = f(x_0)$.
- Hệ số góc của $(d)$ bằng đạo hàm của $f$ tại $x_0$, tức là $a = f'(x_0)$.

Từ đó ta suy ra điều cần chứng minh.

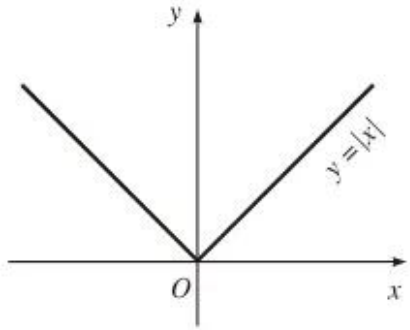
**14.** a) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 0$ vì

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Đồ thị là một đường "liền nét" khi đi qua điểm $O(0 ; 0)$. (h. 5.7).

b) Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x|$ tại điểm $x_0 = 0$ là có hay không, phụ thuộc vào sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$




*Hình 5.7*

Ta nhận thấy

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Vậy $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Suy ra giới hạn đang xét là không tồn tại, nghĩa là hàm số đã cho không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ (vậy không có tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $O(0 ; 0)$).

c) Mệnh đề sai. Thật vậy, hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm 0 (theo câu a), nhưng không có đạo hàm tại điểm đó (theo câu b).

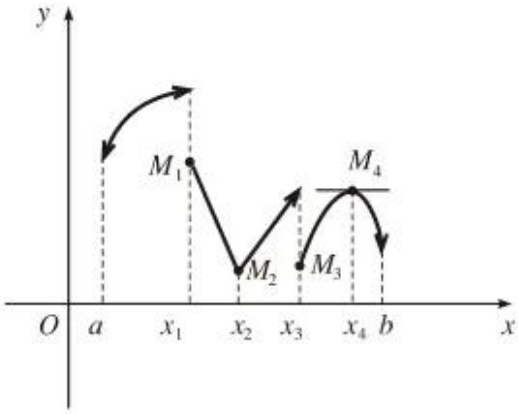
**15.** Căn cứ vào hình 5.8, ta nhận thấy :

+ Hàm số đã cho gián đoạn tại các điểm $x_1$ và $x_3$ vì đồ thị hàm số bị đứt tại các điểm $M_1$ và $M_3$. Do đó tại các điểm $x_1$, $x_3$ hàm số không có đạo hàm.

+ Hàm số đã cho liên tục tại các điểm $x_2$ và $x_4$ vì đồ thị hàm số là đường "liền nét" khi đi qua các điểm $M_2$ và $M_4$.

+ Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_2$ vì tại điểm $M_2$ đồ thị hàm số bị gãy (và hiển nhiên tại đó không có tiếp tuyến), giống như tại điểm (0 ; 0) đối với đồ thị hàm số $y = |x|$.

+ Hàm số có đạo hàm tại điểm $x_4$ và $f'(x_4) = 0$ ; vì tại điểm $M_4$ đồ thị của hàm số có tiếp tuyến và tiếp tuyến này song song với trục hoành.




*Hình 5.8*

## IV – BỔ SUNG KIẾN THỨC

### Một số bài toán tìm phương trình tiếp tuyến của một đường cong

Xung quanh vấn đề tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thường gặp năm bài toán sau đây :

***Bài toán 1.*** Tìm phương trình tiếp tuyến, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0$.

*Cách giải*. Tính $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ rồi thay chúng vào phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(Xem các bài tập 5a, 24a).

***Bài toán 2.*** Tìm phương trình tiếp tuyến, biết tung độ tiếp điểm là $y_0$.

*Cách giải*. Giải phương trình ẩn $x$ sau đây để tìm hoành độ $x_0$ của tiếp điểm

$$f(x) = y_0.$$

Sau khi tìm được $x_0$ thì công việc còn lại chính là giải *Bài toán 1*.

Chú ý rằng phương trình trên có thể có nhiều hơn một nghiệm, với mỗi nghiệm ta có một tiếp tuyến tương ứng.

(Xem các bài tập 5b, 24b, 53a).

***Bài toán 3.*** Tìm phương trình tiếp tuyến, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k$.

*Cách giải*. Giải phương trình ẩn $x$ sau đây để tìm hoành độ $x_0$ của tiếp điểm rồi giải tiếp như đối với *Bài toán 1* :

$$f'(x) = k.$$

Chú ý rằng phương trình trên có thể cho nhiều hơn một điểm $x_0$.

(Xem các bài tập 5c, 53b, 53c, 56).

***Bài toán 4.*** Tìm phương trình tiếp tuyến, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(a\ ;\ b)$ không thuộc đồ thị hàm số.

*Cách giải*. Gọi hoành độ của tiếp điểm là $x_0$. Khi đó tiếp tuyến cần tìm có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(a\ ;\ b)$ nên

$$b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0).$$

Coi hệ thức vừa thu được là một phương trình đối với ẩn $x_0$. Giải phương trình này để tìm $x_0$ rồi làm tiếp như đối với *Bài toán 1*. Chú ý rằng phương trình trên có thể cho nhiều hơn một giá trị $x_0$.

(Xem các bài tập 25, 26).

***Bài toán 5.*** Tìm phương trình tiếp tuyến chung của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

*Cách giải*

*Cách 1*. Ta sẽ tìm hoành độ $x_0$ của điểm $M_0$ và $x_1$ của điểm $M_1$ sao cho đường thẳng $M_0M_1$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M_0$ và với đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại $M_1$. Muốn vậy, ta lập luận như sau.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ hay } y = xf'(x_0) - x_0 f'(x_0) + f(x_0).$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm $M_1(x_1, g(x_1))$ là

$$y = g'(x_1)(x - x_1) + g(x_1) \text{ hay } y = xg'(x_1) - x_1 g'(x_1) + g(x_1).$$

Để $M_0M_1$ là tiếp tuyến chung của hai đồ thị đã cho, điều kiện cần và đủ là

$$\text{(I)} \begin{cases} f'(x_0) = g'(x_1), \\ -x_0 f'(x_0) + f(x_0) = -x_1 g'(x_1) + g(x_1). \end{cases}$$

Giải hệ (I), ta tìm được $x_0$ và $x_1$ ; từ đó tìm được phương trình tiếp tuyến chung $M_0M_1$.

*Cách 2*. Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại các tiếp điểm tương ứng là $M_0$ $(x_0 ; f(x_0))$ và $M_1(x_1 ; g(x_1))$. Ta phải tìm $a$ và $b$ từ hệ phương trình

$$\text{(II)} \begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b, \\ f'(x_0) = a, \\ g(x_1) = ax_1 + b, \\ g'(x_1) = a. \end{cases}$$

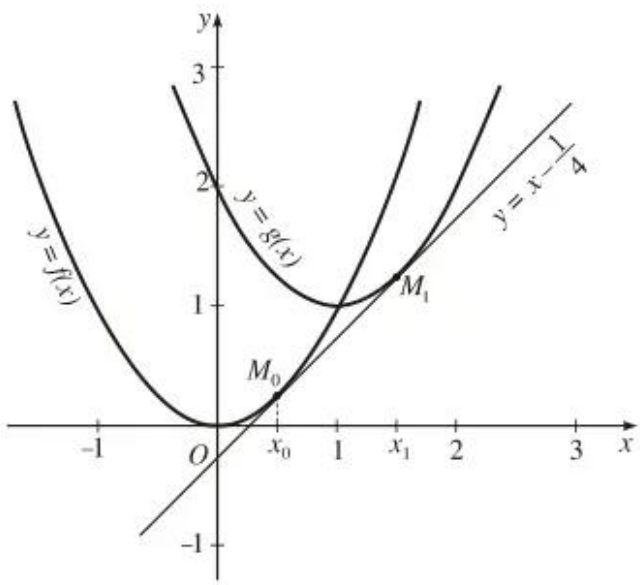
*Chú ý*. Bằng cách khử $a$ và $b$ từ hệ (II), dễ dàng thấy (II) $\Leftrightarrow$ (I).

**Ví dụ**

Tìm tiếp tuyến chung của đồ thị hai hàm số

$y = f(x) = x^2$ và

$y = g(x) = x^2 - 2x + 2$ (h. 5.9).




*Hình 5.9*

*Giải*

Gọi $M_0(x_0\,;x_0^2)$ và $M_1(x_1\,;x_1^2-2x_1+2)$ là hai tiếp điểm của tiếp tuyến chung phải tìm. Theo (I), ta có

$$\begin{cases}2x_0=2x_1-2\\(-x_0)(2x_0)+x_0^2=-x_1(2x_1-2)+x_1^2-2x_1+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=x_1-1,\\-x_0^2=-x_1^2+2.\end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $x_0=\dfrac{1}{2}, x_1=\dfrac{3}{2}$. Từ đó, dễ dàng suy ra phương trình tiếp tuyến chung phải tìm là $y=x-\dfrac{1}{4}$.

*Chú ý*. Chỉ nên nêu ra bài toán 5 cho các học sinh khá, giỏi làm.