LUYỆN TẬP (1 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

Giúp học sinh vận dụng thành thạo các quy tắc tính đạo hàm, củng cố thêm các vấn đề đã học ở bài trước, đồng thời bổ sung thêm một số bài toán ứng dụng thực tế của đạo hàm mà trong SGK chưa có điều kiện nêu ra.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Với 2 tiết học, giáo viên có điều kiện cho học sinh nhắc lại những kiến thức đã học của cả hai bài, đặc biệt nhấn mạnh : ý nghĩa hình học của đạo hàm, đạo hàm của những hàm số thường gặp, các công thức tính đạo hàm của một tổng, một tích, một thương và đạo hàm của hàm số hợp. Khi chữa mỗi bài tập giáo viên nên phân tích cho học sinh thấy rõ các công thức đó đã được vận dụng như thế nào.

Nếu không đủ thời gian chữa hết các bài tập thì giáo viên cần chọn lọc những bài đòi hỏi các kĩ năng cơ bản ; chẳng hạn, có thể không chữa bài 26.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

21. a) $x < 0$ hoặc $x > 2$; b) $1 - \sqrt{2} \le x \le 1 + \sqrt{2}$.

22. a) $x_1 = 5{,}162 \pm 0{,}001$; $x_2 = -1{,}162 \pm 0{,}001$ (hoặc viết $x_1 \approx 5{,}162$ và $x_2 \approx -1{,}162$).

b) Ta có $y' = x^3 - 3x^2 - 3x$. Do đó

$$y' + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 5) = 0.$$

Phương trình có ba nghiệm là 1, $1 + \sqrt{6}$ và $1 - \sqrt{6}$.

Vậy các nghiệm gần đúng của phương trình với sai số tuyệt đối không vượt quá 0,001 là

$$x_1 = 1 ; \qquad x_2 = 3{,}449 \pm 0{,}001 ; \qquad x_3 = -1{,}449 \pm 0{,}001.$$

23. a) $\dfrac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$; b) $\dfrac{-5(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^6}$;

c) $2x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; d) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$;

e) $\dfrac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}$ (*Gợi ý*. Có thể viết $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$ rồi tính đạo hàm).

Cũng có thể viết đáp số dưới dạng $\dfrac{x^2 - 1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}$.

24. a) $y = 2x - 1$; b) $y = \dfrac{x+6}{4}$.

25. Đặt $f(x) = x^2$ và gọi M_0 là điểm thuộc $(\mathcal{P})$ với hoành độ x_0. Khi đó toạ độ của điểm M_0 là $\left(x_0 ; f(x_0)\right)$, hay $(x_0 ; x_0^2)$.

Cách 1. Ta có $y' = 2x$. Phương trình tiếp tuyến của $(\mathcal{P})$ tại điểm M_0 là

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2 .$$

Tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0 ; -1)$ nên ta có

$$-1 = 2x_0 . 0 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

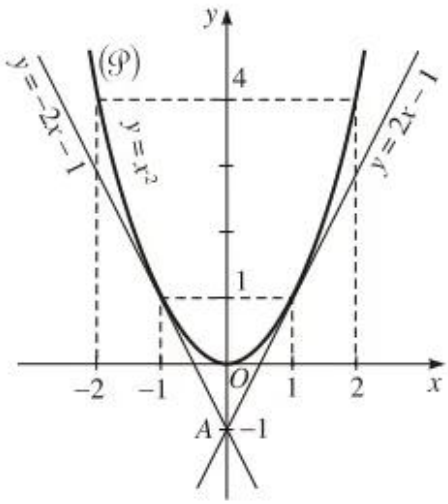
+ Với $x_0 = 1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

+ Với $x_0 = -1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = -2(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathcal{P})$ đi qua A với các phương trình tương ứng là $y = \pm 2x - 1$ (h. 5.10).



Hình 5.10

Cách 2. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0 ; -1)$ với hệ số góc k là

$$y = kx - 1.$$

Để (d) tiếp xúc với $(\mathcal{P})$ tại điểm M_0, điều kiện cần và đủ là (xem bài tập 13)

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 - 1 \\ f'(x_0) = k \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_0^2 = kx_0 - 1 \\ 2x_0 = k. \end{cases}.$$

Khử x_0 từ hệ này ta tìm được $k = \pm 2$.

Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathcal{P})$ đi qua điểm $A(0 ; -1)$ với các phương trình là

$$y = \pm 2x - 1.$$

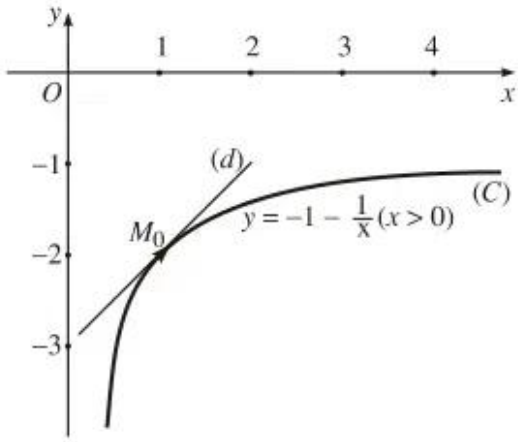
26. (h. 5.11) Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) của quỹ đạo (C) tại tiếp điểm $M_0\left(x_0 ; -1 - \dfrac{1}{x_0}\right)$ là

$$y = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0}, \text{ hay}$$

$$x_0^2 + 2x_0 - x + x_0^2 y = 0.$$

Ta phải tìm $x_0 > 0$, sao cho (d) lần lượt đi qua bốn điểm có toạ độ $(1 ; 0)$, $(2 ; 0)$, $(3 ; 0)$ và $(4 ; 0)$.



Hình 5.11

a) Với $x = 1$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$, suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4142$;

b) Với $x = 2$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0$, suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}7321$;

c) Với $x = 3$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$, suy ra $x_0 = 1$;

d) Với $x = 4$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 4 = 0$, suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}2361$.

27. Chọn Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng từ mặt đất lên trời, gốc O là vị trí viên đạn được bắn lên (h. 5.12) ; khi đó phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \ (g = 9{,}8 \text{ m/s}^2).$$

(Xem SGK Vật lí 10).

Ta có vận tốc tại thời điểm t là

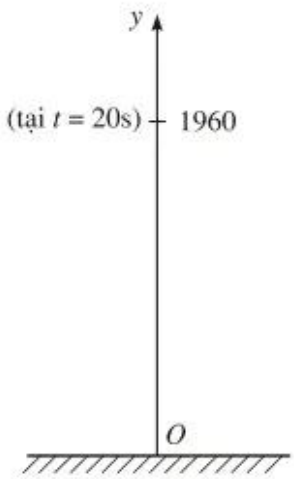
$$v = y'(t) = v_0 - gt.$$

Do đó

$$v = 0 \Leftrightarrow 0 = v_0 - gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{196}{9{,}8} = 20(\text{s}).$$

Vậy khi $t = 20$ s thì viên đạn bắt đầu rơi, lúc đó viên đạn cách mặt đất

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 196.20 - \frac{1}{2}.\,9{,}8.20^2 = 1960(\text{m}).$$



Hình 5.12

IV – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về đạo hàm của thương hai hàm số và đạo hàm của hàm số hợp

1. Đạo hàm của thương hai hàm số

Chứng minh định lí 3. (Đạo hàm của thương hai hàm số)

Xét hàm số $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Ta phải chứng minh : Với x bất kì thuộc J và $v(x) \neq 0$ thì

$$y'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}.$$

• Tính $$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$= \frac{\Delta u.v(x) - u(x).\Delta v}{v^2(x) + v(x).\Delta v}.$$

• Tìm giới hạn $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}.v(x) - u(x).\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x).\Delta v}.$$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$ và $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Do đó ta được
$$y'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}.$$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Trong mục này, ta sẽ nói thêm về định nghĩa hàm số hợp và chứng minh quy tắc tính đạo hàm của nó. Để làm điều đó, cần bổ sung định lí sau đây :

ĐỊNH LÍ 1

Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$ *là* $f(x) = L + \varepsilon(x)$ *trong đó*
$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Dễ dàng chứng minh định lí này bằng cách đặt $\varepsilon(x) = f(x) - L$.

a) Khái niệm về hàm số hợp

Cho hai hàm số $u : D \to \mathbb{R}$ và $f : D_f \to \mathbb{R}$, sao cho $u(D) \subset D_f$, nghĩa là $u(x) \in D_f$ với mọi x thuộc D. Khi đó với mỗi $x \in D$, qua hàm số u, tương ứng một số thực duy nhất $u(x)$ thuộc D_f và với số thực $u(x)$ này, qua hàm số f, tương ứng một số thực duy nhất $f[u(x)]$. Vậy tồn tại hàm số $g : D \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $g(x) = f[u(x)]$ (với mọi $x \in D$) gọi là *hàm số hợp* của hàm số f và hàm số u (hàm số u được gọi là hàm số trung gian), kí hiệu là $g = f \circ u$. Như vậy, ta có :

$g(x) = (f \circ u)(x) = f[u(x)]$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & D_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

b) Đạo hàm của hàm số hợp

Trong định lí dưới đây, D và D_f là hai khoảng hoặc là hợp của những khoảng, u và f là hai hàm số lần lượt xác định trên D và D_f sao cho tồn tại hàm số hợp $g = f \circ u$.

ĐỊNH LÍ 2. *Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in D$ và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0) \in D_f$ thì hàm số hợp $g(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0* và

$$g'(x_0) = f'(u_0).\, u'(x_0).$$

Chứng minh. Gọi Δu là số gia của hàm số $u = u(x)$ ứng với số gia Δx tại điểm x_0. Vì hàm số u có đạo hàm tại x_0 nên nó liên tục tại điểm đó, nghĩa là khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$. Gọi Δy là số gia của hàm số $y = f(u)$ tại điểm $u_0 = u(x_0)$ ứng với số gia Δu. Vì hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm u_0 nên theo định lí 1,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \varepsilon(\Delta u)$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = [f'(u_0)].\Delta u + [\varepsilon(\Delta u)].\Delta u, \qquad (1)$$

ở đó $\Delta u \neq 0$ và $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$.

Ta nhận thấy đẳng thức (1) cũng đúng khi $\Delta u = 0$, vì khi $\Delta u = 0$ thì

$$\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = f(u_0 + 0) - f(u_0) = 0,$$

do đó hai vế của (1) đều bằng 0.

Chia hai vế của (1) cho Δx ($\Delta x \neq 0$), ta được

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'(u_0)\right].\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left[\varepsilon(\Delta u)\right].\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Chú ý rằng Δy cũng chính là số gia của hàm số g tại điểm x_0 ứng với số gia Δx. Thực vậy, do $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ và $u(x_0) = u_0$ nên $u(x_0 + \Delta x) = u_0 + \Delta u$. Từ đó suy ra

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = f[u(x_0 + \Delta x)] - f[u(x_0)] = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta y.$$

Vì thế, bằng cách chuyển qua giới hạn hai vế của (2) khi $\Delta x \to 0$ (trên đây ta đã lưu ý rằng khi đó cũng xảy ra $\Delta u \to 0$), ta có

$$g'(x_0) = f'(u_0).u'(x_0)$$

Chú ý. Do $g = f \circ u$ và $f'(u_0) = f'[u(x_0)] = (f' \circ u)(x_0)$ nên công thức đạo hàm của hàm số hợp còn được viết dưới dạng

$$g' = (f' \circ u) \cdot u'.$$