# LUYỆN TẬP (1 tiết)

## I – MỤC ĐÍCH

Củng cố và rèn luyện kĩ năng giải các bài tập quanh chủ đề vi phân và đạo hàm cấp cao.

## II – GỢI Ý TRẢ LỜI CÁC CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**45.** a) $dy = \dfrac{6\left(2\cos^4 3x + 1 - 2\cos^2 3x\right)}{\sin^3 3x \cdot \cos^3 3x}dx$ ;

b) $dy = -\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}\,dx.$

**46.** a) Vì $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}} = \dfrac{1}{\sqrt{20,25 + 0,05}}$ nên ta xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại $x_0 = 20,25$ với $\Delta x = 0,05$. Ta có

$f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{20,25}} = \dfrac{1}{4,5}$ ; $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2 \cdot 20,25 \cdot \sqrt{20,25}} = -\dfrac{1}{182,25}$. Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{20,3}} = f(20,3) = f(x_0 + 0,05) \approx f(x_0) + f'(x_0).0,05 = \frac{1}{4,5} - \frac{0,05}{182,25} \approx 0,222.$$

b) Vì $\tan 29^o30' = \tan\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{360}\right)$ nên ta xét hàm số $f(x) = \tan x$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ với $\Delta x = -\dfrac{\pi}{360}$. Ta có

$$f(x_0) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ; \quad f'(x_0) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}. \text{ Do đó}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{360}\right) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(-\frac{\pi}{360}\right) \approx 0,566.$$

**47.** a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ ; $f''(x) = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$ ;

$$f^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x\,(1 + \tan^2 x).$$

b) *Gợi ý*. Chứng minh bằng quy nạp.

**48.** a) $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$ nên

$y' = A\omega\cos(\omega t + \varphi) - B\omega\sin(\omega t + \varphi)$,

$y'' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$.

Suy ra

$$y'' + \omega^2 y = -[A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) + B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)]$$
$$+ \omega^2[A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)] = 0.$$

b) Chứng minh tương tự.

## III – BỔ SUNG KIẾN THỨC

### Về tính gần đúng nhờ vi phân

• Trong §4, ta đã biết công thức gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \,.\, \Delta x\ ;$$

khi đó, nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta được

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \,.\, (x - x_0). \qquad (1)$$

Ý nghĩa của công thức gần đúng (1) là : Nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì với $|x - x_0|$ đủ nhỏ thì ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x)$ bởi một hàm số bậc nhất

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \,.\, (x - x_0).$$

Áp dụng công thức (1) khi $x_0 = 0$ thì với $|x|$ đủ nhỏ ta có các công thức gần đúng sau :

a) $\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x$ ; b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$ ;

c) $\sin x \approx x$ ; d) $\tan x \approx x$.

• Ước lượng sai số khi áp dụng công thức gần đúng (1).

Trong SGK năm 2000 lớp 12, có giới thiệu định lí La-gơ-răng :

*Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ thì tồn tại một điểm $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Nếu đặt $a = x_0$, $b = x$ thì công thức (2) cho

$$f(x) - f(x_0) = f'(c).\,(x - x_0),$$

hay

$$f(x) = f(x_0) + f'(c).\,(x - x_0), \tag{3}$$

trong đó $c \in (x_0\,;\,x)$ nếu $x_0 < x$ (hoặc $c \in (x\,;\,x_0)$ nếu $x < x_0$).

Công thức (3) được gọi là công thức La-gơ-răng, nó là một trường hợp đặc biệt của công thức Tay-lo sau đây :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}.(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}.(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x - x_0)^{n+1} \tag{4}$$

(với giả thiết : Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $(n + 1)$ trên khoảng nào đó chứa $x_0$ và $x$ ; $c$ là một điểm nằm giữa $x_0$ và $x$).

Khi $n = 1$ thì công thức (4) cho

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}.(x - x_0)^2.$$

Đặt $x = x_0 + \Delta x$, ta có công thức gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x,$$

với sai số tuyệt đối mắc phải là $\left|\dfrac{f''(c)}{2}.(\Delta x)^2\right|$.

**Ví dụ**

Nếu sử dụng công thức gần đúng (1) để tính gần đúng giá trị $\sin 30^{o}30'$ (xem ví dụ 2, mục 2, §4 chương V) thì sai số tuyệt đối mắc phải là

$$\left|\frac{f''(c)}{2}.\left(\frac{\pi}{360}\right)^2\right| = \left|\frac{\sin c}{2}.\left(\frac{\pi}{360}\right)^2\right| \le \frac{1}{2}.\left(\frac{\pi}{360}\right)^2 < 10^{-4}.$$