LUYỆN TẬP (2 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

Mục đích chủ yếu của tiết luyện tập là nâng cao kĩ năng giải các phương trình lượng giác.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Nên tập trung thời gian vào các bài tập từ 38 đến 41, 42a), b). Bài tập 37 tuy có nội dung thực tế, nhưng cần cân nhắc thời lượng cho phép. Bài tập 42c), d) đòi hỏi kiểm tra xem các giá trị tìm được của ẩn có thoả mãn ĐKXĐ của phương trình hay không (đây cũng là một yêu cầu tương đối khó) ; giáo viên có thể chọn một trong các phương trình trong bài để chữa và hướng dẫn cách làm cho học sinh.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

37. a) Người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất khi $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1$. Ta có

$$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(3k+1).$$

Ta cần tìm k nguyên để $0 \le t \le 2$.

$$0 \le t \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{2}(3k+1) \le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le 1 \Leftrightarrow k \in \{0\,;\,1\}.$$

Với $k = 0$ thì $t = \frac{1}{2}$. Với $k = 1$ thì $t = 2$. Vậy trong 2 giây đầu tiên, người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất vào các thời điểm $\frac{1}{2}$ giây và 2 giây.

b) Người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét khi $3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2$. Ta có

$$3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2 \Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right]=\frac{8}{9}\ \Leftrightarrow\ \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right]=-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2\pi}{3}(2t-1)=\pm\,\alpha+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow\ t=\pm\frac{3\alpha}{4\pi}+\frac{1}{2}+\frac{3k}{2}\left(\text{với }\ \alpha=\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)\right).$$

Ta tìm k nguyên để $0\le t\le 2$.

- Với $t=\dfrac{3\alpha}{4\pi}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3k}{2}$, ta có

$$0\le t\le 2\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2\pi}\le k\le 1-\frac{\alpha}{2\pi}.$$

Ta chọn $\alpha=\arccos\left(-\dfrac{1}{9}\right)\approx 1{,}682$. Khi đó $-0{,}601<k<0{,}732$, suy ra $k=0$ và $t\approx 0{,}90$.

- Với $t=-\dfrac{3\alpha}{4\pi}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3k}{2}$, ta có

$$0\le t\le 2\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{2\pi}\le k\le 1+\frac{\alpha}{2\pi}.$$

Vì $\alpha\approx 1{,}682$ nên $-0{,}066<k<1{,}267$, suy ra $k\in\{0\,;\,1\}$.

Với $k=0$, ta có $t\approx 0{,}10$; Với $k=1$, ta có $t\approx 1{,}60$.

Kết luận. Trong khoảng 2 giây đầu tiên, có ba thời điểm mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét, đó là $t\approx 0{,}10$ giây ; $t\approx 0{,}90$ giây và $t\approx 1{,}60$ giây.

38. a) $\cos^2x-3\sin^2x=0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{3(1-\cos 2x)}{2}=0$

$$\Leftrightarrow\ \cos 2x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

b) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. *Gợi ý*. Đặt $y=\tan x+\cot x$ với điều kiện $|\,y\,|\ge 2$.

c) $\sin x + \sin^2\frac{x}{2} = 0,5 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi.$

39. a) $\sin x - 2\cos x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{5}}$,

trong đó α là số thoả mãn $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Phương trình cuối cùng vô nghiệm do $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Trong phương trình $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$, ta đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì được phương trình $5t^2 + t + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

40. a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ (loại } \cos x = -\frac{3}{2}\text{)}.$$

Vậy, với điều kiện $0^o \le x \le 360^o$, phương trình có hai nghiệm là $x = 90^o$ và $x = 270^o$.

b) ĐKXĐ : $\sin x \ne 0$ và $\cos x \ne 0$. Ta có

$$\tan x + 2\cot x = 3 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1,\\ \tan x = 2.\end{array}\right.$$

• $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = 45^o + k180^o$. Có một nghiệm thoả mãn $180^o \le x \le 360^o$, ứng với $k = 1$ là $x = 225^o$.

• $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = a + k180^o$ với $\tan a = 2$. Ta có thể chọn $a \approx 63^o26'5,8''$. Vậy có một nghiệm (gần đúng) thoả mãn $180^o \le x \le 360^o$ là

$$x = a + 180^o \approx 243^o26'5,8''.$$

Kết luận. Với điều kiện $180^o \le x \le 360^o$, phương trình có hai nghiệm $x = 225^o$ và $x \approx 243^o26'5,8''$.

41. a) *Cách 1* (chia hai vế cho $\cos^2 x$). Chú ý rằng những giá trị của x mà $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó

$3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ hoặc $\tan x = -\frac{1}{3}$. Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi.$$

Cách 2 (dùng công thức hạ bậc)

$$3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{3(1-\cos 2x)}{2} - \sin 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x - 4\cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

trong đó, α là số thoả mãn $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Giải tiếp ta được

$$\cos(2x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2x - \alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{array}\right.$$

Chú ý. Có thể thấy hai họ nghiệm $x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$ và $x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi$ thực chất là như nhau. Thực vậy, từ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ suy ra $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Do đó

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

b) Viết lại vế phải thành $2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$ rồi rút gọn, ta đi đến phương trình

$$\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 6\cos^2 2x = 0.$$

Với $\cos^2 2x \neq 0$, có thể chia hai vế cho $\cos^2 2x$ để được phương trình $\tan^2 2x - \tan 2x - 6 = 0$. Từ đó suy ra $\tan 2x = -2$ hoặc $\tan 2x = 3$. Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2} \text{ và } x = \frac{1}{2}\arctan 3 + k\frac{\pi}{2}.$$

c) Viết lại vế phải thành $-(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi rút gọn, ta đi đến phương trình

$$3\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0.$$

Với $\cos x \neq 0$, có thể chia hai vế cho $\cos^2 x$ để được phương trình $3\tan^2 x + (3 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$. Từ đó suy ra $\tan x = -1$ hoặc $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

42. a) Ta biến đổi vế trái như sau :

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x\,(2\cos x + 1).$$

Tương tự, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x(2\cos x + 1)$. Do đó

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x\,(2\cos x + 1) = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x + 1) = 0.$$

Dễ thấy $\sin 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$;

$$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

Kết luận. Phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ và $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \frac{3\pi}{4} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

c) ĐKXĐ : $\sin 4x \neq 0$ (điều kiện này đã bao gồm $\sin 2x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$). Với điều kiện đó, ta có thể nhân hai vế của phương trình với $\sin 4x$:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k2\pi, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Ta thấy ngay : Nếu $2x = k2\pi$ thì $\sin 2x = 0$; nếu $2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì $\cos 2x = 0$, nên các giá trị đó của x đều không thoả mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) ĐKXĐ : $\sin 2x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{\cos x - \sin x}\right) = 0.$$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\frac{1}{\cos x - \sin x} = 1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}\right.$

Dễ thấy các giá trị tìm được của ẩn đều thoả mãn ĐKXĐ (để kiểm tra, chú ý rằng do $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$ nên điều kiện $\sin 2x \neq 1$ tương đương với điều kiện $\cos x - \sin x \neq 0$). Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$