LUYỆN TẬP (2 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

Bài này có mục đích giúp học sinh ôn tập, củng cố các kiến thức và kĩ năng trong hai bài §1 và §2.

II – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Trước hết giáo viên nhắc lại và kiểm tra về quy tắc cộng, quy tắc nhân, các khái niệm và công thức về hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp. Sau đó gọi học sinh lên bảng chữa một số trong các bài tập từ 9 đến 14. Đối với mỗi bài tập, giáo viên cần phân tích cách giải chi tiết, chỉ ra các chỗ sai (nếu có) của học sinh.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

9. Có $4^{10} = 1\,048\,576$ phương án trả lời.

10. Một số có 6 chữ số chia hết cho 5 có dạng $\overline{abcdeg}$ với $a \in \{1, 2, ..., 9\}$, $b, c, d, e \in \{0, 1, ..., 9\}$ và $g \in \{0, 5\}$. Vậy theo quy tắc nhân, ta có $9.10.10.10.10.2 = 180\,000$ số như vậy.

11. Có 4 phương án đi qua các tỉnh từ A đến G là

a) $A \to B \to D \to E \to G$;

b) $A \to B \to D \to F \to G$;

c) $A \to C \to D \to E \to G$;

d) $A \to C \to D \to F \to G$.

Theo quy tắc nhân, ta có

Phương án a) có $2.3.2.5 = 60$ cách đi ;

Phương án b) có $2.3.2.2 = 24$ cách đi ;

Phương án c) có $3.4.2.5 = 120$ cách đi ;

Phương án d) có $3.4.2.2 = 48$ cách đi.

Theo quy tắc cộng, ta có cả thảy $60 + 24 + 120 + 48 = 252$ cách đi từ A đến G.

12. Mỗi cách đóng - mở 6 công tắc của mạng điện được gọi là một trạng thái của mạng điện. Theo quy tắc nhân, mạng điện có $2^6 = 64$ trạng thái. Trước hết, ta tìm xem có bao nhiêu trạng thái không thông mạch (không có dòng điện đi qua). Mạch gồm hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$. Trạng thái không thông mạch xảy ra khi và chỉ khi cả hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch. Dễ thấy nhánh $A \to B$ có 8 trạng thái trong đó chỉ có duy nhất một trạng thái thông mạch, còn lại có 7 trạng thái không thông mạch. Tương tự ở nhánh $C \to D$ có 7 trạng thái không thông mạch. Theo quy tắc nhân, ta có $7 . 7 = 49$ trạng thái mà cả $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch. Vậy mạng điện có $64 - 49 = 15$ trạng thái thông mạch từ P tới Q.

13. a) $C_{15}^{4} = 1365$; b) $A_{15}^{3} = 2730$.

14. a) Có $A_{100}^{4} = 94\,109\,400$ kết quả có thể.

b) Nếu giải nhất đã xác định thì 3 giải nhì, ba, tư sẽ rơi vào 99 người còn lại. Vậy có $A_{99}^{3} = 941\,094$ kết quả có thể.

c) Người giữ vé số 47 có 4 khả năng trúng một trong 4 giải. Sau khi xác định giải của người này thì 3 giải còn lại sẽ rơi vào 99 người không giữ vé số 47. Vậy có A_{99}^{3} khả năng. Theo quy tắc nhân, ta có $4 . A_{99}^{3} = 3\,764\,376$ kết quả có thể.

15. Số cách chọn 5 em trong 10 em là C_{10}^{5}. Số cách chọn 5 em toàn nam là C_{8}^{5}. Do đó số cách chọn có ít nhất một nữ là $C_{10}^{5} - C_{8}^{5} = 196$.

16. Số cách chọn 5 em toàn nam là C_{7}^{5}. Số cách chọn 4 nam và 1 nữ là $C_{7}^{4}C_{3}^{1}$.

Vậy đáp số bài toán là $C_{7}^{5} + C_{7}^{4}C_{3}^{1} = 126$.

IV – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Chứng minh hai tính chất cơ bản của số C_n^k bằng suy luận thuần tuý

Trong SGK ta đã chứng minh các tính chất 1 và tính chất 2 bằng biến đổi đại số trên công thức tính C_n^k. Sau đây là cách chứng minh khác chỉ dùng suy luận thuần tuý dựa trên định nghĩa của tổ hợp, không dùng công thức tính C_n^k.

Tính chất 1

Cho các số nguyên n, k với $0 \le k \le n$. Ta có

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (1)$$

Chứng minh. Gọi X là họ các tập con có k phần tử của A và Y là họ các tập con có $n - k$ phần tử của A.

Với mỗi tập $M \subset X$, ta đặt tương ứng nó với tập $C_A M \subset Y$. Dễ kiểm tra rằng tương ứng này là một đơn ánh. Tương ứng này cũng là một toàn ánh ; thật vậy, mỗi tập $N \subset Y$ thì có tập $M = C_A N \subset X$ với $C_A M = N$. Vậy tương ứng này là một song ánh, do đó $|X| = |Y|$. Theo định nghĩa thì $|X| = C_n^k$; $|Y| = C_n^{n-k}$. Do đó (1) được chứng minh.

Tính chất 2 (Hằng đẳng thức Pa-xcan)

Cho các số nguyên n, k với $1 \leq k \leq n$. Ta có

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{2}$$

Chứng minh. Nếu $k = 1$ thì đẳng thức (2) hiển nhiên đúng. Giả sử $k > 1$, xét tập A có $n + 1$ phần tử $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$ và gọi X là họ các tập con có k phần tử của A. Gọi Y là họ các tập con của A có k phần tử mà không chứa a_{n+1}, Z là họ các tập con của A có k phần tử mà chứa a_{n+1}. Ta có $X = Y \cup Z$ và $Y \cap Z = \varnothing$, nên

$$|X| = |Y| + |Z|. \tag{3}$$

Ta có

$$|X| = C_{n+1}^k. \tag{4}$$

Y chính là họ các tập con có k phần tử của tập $A' = \{a_1, ..., a_n\}$, do đó

$$|Y| = C_n^k. \qquad (5)$$

Ta còn phải tính $|Z|$. Mỗi tập $B \in Z$ khi bỏ đi phần tử a_{n+1} thì được một tập B' với B' là một tập con có $(k-1)$ phần tử của $A' = \{a_1, ..., a_n\}$. Ngược lại, với mỗi tập con B' có $(k-1)$ phần tử của A' ta thêm vào B' phần tử a_{n+1} thì được một tập B của họ Z. Vậy tương ứng $B \to B'$ là một song ánh giữa Z và họ các tập con có $(k-1)$ phần tử của A'. Vậy $|Z|$ = số các tập con có $(k-1)$ phần tử của A'.

Do đó $$|Z| = C_n^{k-1}. \tag{6}$$

Thành thử, từ (3), (4), (5) và (6) ta suy ra đẳng thức (2).