LUYỆN TẬP (1 tiết)

21. Theo công thức khai triển nhị thức Niu-tơn

$$(1+3x)^{10} = 1 + C_{10}^{1}(3x) + C_{10}^{2}(3x)^2 + C_{10}^{3}(3x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + 30x + 405x^2 + 3240x^3 + \cdots$$

22. $C_{15}^{7}3^8(-2x)^7 = -C_{15}^{7}3^8 2^7 x^7$. Vậy hệ số của x^7 là $-C_{15}^{7}3^8 2^7$.

23. Ta có $x^{25}y^{10} = (x^3)^5(xy)^{10}$. Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là $C_{15}^{10} = 3003$.

24. Từ điều kiện $C_n^2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31$ ta suy ra $n = 32$.

Do đó $$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Công thức nhị thức Niu-tơn được chứng minh.

Chứng minh công thức nhị thức Niu-tơn

Ta sẽ chứng minh khẳng định $P(n)$: Với mọi số nguyên dương n

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

bằng quy nạp (xem phương pháp chứng minh quy nạp trong chương III SGK).

- Bước cơ sở : $P(1)$ đúng hiển nhiên.
- Bước quy nạp : Giả sử khẳng định $P(n)$ đúng. Ta có

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1}.$$

Lại có

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k + x^{n+1}.$$

Thay vào đẳng thức trên và áp dụng hằng đẳng thức Pa-xcan ta được

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) x^k + x^{n+1}$$

$$= C_{n+1}^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k.$$

Vậy $P(n+1)$ đúng.

Theo nguyên lí quy nạp, khẳng định $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Tóm lại, ta đã chứng minh được công thức

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Với $x = \dfrac{b}{a}$, ta có $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \dfrac{b^k}{a^k}$.