

LUYỆN TẬP (1 tiết)

I – MỤC ĐÍCH

Nâng cao kỹ năng nhận biết và tính số phân tử của các tập Ω , Ω_A . Từ đó áp dụng định nghĩa cổ điển của xác suất để tính xác suất.

II – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

30. a) Số kết quả có thể là C_{199}^5 . Số kết quả thuận lợi là C_{99}^5 . Xác suất cần tìm là $\frac{C_{99}^5}{C_{199}^5} \approx 0,029$.
- b) Số kết quả thuận lợi là C_{50}^5 . Xác suất cần tìm là $\frac{C_{50}^5}{C_{199}^5} \approx 0,0009$.
31. Số kết quả có thể $C_{10}^4 = 210$. Số cách chọn toàn quả cầu đỏ là 1. Số cách chọn toàn quả cầu xanh là $C_6^4 = 15$. Do đó số cách chọn trong đó có cả quả cầu xanh và quả cầu đỏ là $210 - 15 - 1 = 194$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{194}{210} = \frac{97}{105}$.
32. Số kết quả có thể là $7^3 = 343$. Số kết quả thuận lợi là $A_7^3 = 210$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{210}{343} = \frac{30}{49}$.
33. Số kết quả có thể là 36. Có 8 kết quả thuận lợi là : (1 ; 3), (2 ; 4), (3 ; 5), (4 ; 6) và các hoán vị của nó. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

III – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Một số bài toán về ngày sinh trùng nhau

Bài toán 1. Trong một nhóm có n người. Biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận.

- a) Tính xác suất để trong nhóm có ít nhất hai người có cùng ngày sinh (tức cùng ngày, cùng tháng).
- b) Hãy xác định xem n nhỏ nhất phải bằng bao nhiêu để xác suất nêu ở câu a) lớn hơn 0,5.

Giải

- a) Năm không nhuận có 365 ngày, ta kí hiệu $N = 365$. Giả sử người thứ i sinh vào ngày thứ t_i trong năm. Một kết quả có thể là một bộ n số (t_1, t_2, \dots, t_n) với mỗi $t_i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Ta giả thiết các kết quả là đồng khả năng.

Ta có không gian mẫu là $\Omega = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid t_i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$. Theo quy tắc nhân, ta có $|\Omega| = N^n$. Gọi A là biến cố "Trong nhóm có ít nhất hai người có cùng ngày sinh". Xét biến cố đối của A là \bar{A} : " n người trong nhóm có ngày sinh khác nhau". Ta có số bộ (t_1, t_2, \dots, t_n) , trong đó các t_i đều khác nhau, bằng số chinh hợp chập n của N , tức là bằng $A_N^n = N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)$.

$$\text{Vậy } P(\bar{A}) = \frac{A_N^n}{N^n}. \text{ Suy ra } P(A) = 1 - \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{N^n}.$$

b) *Cách 1.* Gọi $P(n)$ là xác suất để trong một nhóm n người có ít nhất hai người có cùng ngày sinh. Theo trên ta có

$$\begin{aligned} P(n) &= 1 - \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{N^n} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) < \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{N}\right)$$

nên dễ thấy $P(n)$ là hàm tăng theo n .

Bảng sau đây cho giá trị gần đúng của xác suất $P(n)$ với các n khác nhau :

n	3	4	5	10	20	22	23	30	40	60
$P(n)$	0,0082	0,0164	0,0271	0,1170	0,4114	0,4757	0,5073	0,7063	0,891	0,994

Từ bảng trên ta thấy giá trị n bé nhất để $P(n)$ lớn hơn 0,5 là $n = 23$.

Cách 2. Theo câu a) ta có

$$\begin{aligned} P(A) \geq 0,5 &\Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{N^n} \leq 0,5 \\ &\Leftrightarrow P(\bar{A}) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \leq 0,5. \end{aligned}$$

Do công thức xấp xỉ $e^{-x} \approx 1 - x$ nên $1 - \frac{k}{N} \approx e^{-\frac{k}{N}}$. Vậy

$$P(\bar{A}) \approx e^{-\frac{1+2+\dots+(n-1)}{N}} = e^{-\frac{n(n-1)}{2N}} \leq 0,5.$$

Suy ra $n(n - 1) \geq 2N\ln 2 \approx 505,997$.

Với $n = 22$ thì $n(n - 1) = 462$, với $n = 23$ thì $n(n - 1) = 506$. Vậy n nhỏ nhất là 23.

Bài toán 2. Trong một nhóm có n người. Biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận và bạn cũng không sinh vào năm nhuận.

a) Tính xác suất để có ít nhất một người trong nhóm đó có ngày sinh trùng với ngày sinh của bạn.

b) Hãy xác định xem n nhỏ nhất phải bằng bao nhiêu để xác suất nêu ở câu a) lớn hơn 0,5.

Giải

a) Gọi B là biến cố "Trong nhóm có ít nhất một người có ngày sinh trùng với ngày sinh của bạn".

Xét biến cố đối của B là \bar{B} : "n người trong nhóm có ngày sinh khác ngày sinh của bạn". Ta có $\Omega_{\bar{B}} = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \text{các } t_i \text{ đều khác với ngày sinh của bạn}\}$. Mỗi t_i có $N - 1 = 364$ khả năng chọn. Vậy $|\Omega_{\bar{B}}| = 364^n$. Thành thử

$$P(\bar{B}) = \frac{364^n}{365^n}. \text{ Suy ra } P(B) = 1 - \frac{364^n}{365^n}.$$

b) Ta có $P(B) > 0,5 \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{364^n}{365^n} < 0,5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 365 - \ln 364} \approx 252,7$.

Số tự nhiên n nhỏ nhất thoả mãn bất đẳng thức trên là $n = 253$.