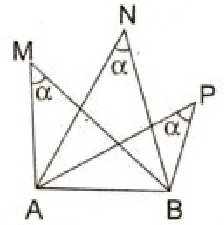
# §6. Cung chứa góc

Liệu ba điểm M, N, P có cùng thuộc một cung tròn căng dây AB hay không ?




## 1. Bài toán quỹ tích "cung chứa góc"

***1) Bài toán.*** Cho đoạn thẳng AB và góc $\alpha$ ($0^{o} < \alpha < 180^{o}$). Tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$. (Ta cũng nói quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới góc $\alpha$).

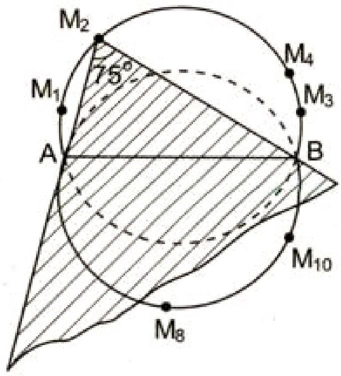
**?1** *Cho đoạn thẳng CD.*

*a) Vẽ ba điểm* $N_1, N_2, N_3$ *sao cho* $\widehat{CN_1D} = \widehat{CN_2D} = \widehat{CN_3D} = 90^o$.

*b) Chứng minh rằng các điểm* $N_1, N_2, N_3$ *nằm trên đường tròn đường kính* CD.

**?2** *Vẽ một góc trên bìa cứng (chẳng hạn, góc* $75^o$*). Cắt ra, ta được một mẫu hình như phần gạch chéo ở hình 39. Đóng hai chiếc đinh A, B cách nhau 3 cm trên một tấm gỗ phẳng.*

*Dịch chuyển tấm bìa trong khe hở sao cho hai cạnh của góc luôn dính sát vào hai chiếc đinh A, B. Đánh dấu các vị trí* $M_1$, $M_2$, $M_3$, ..., $M_{10}$ *của đỉnh góc (* $\widehat{AM_1B} = \widehat{AM_2B} = \cdots = \widehat{AM_{10}B} = 75^o$*).*




*Hình 39*

*Qua thực hành, hãy dự đoán quỹ đạo chuyển động của điểm* M.

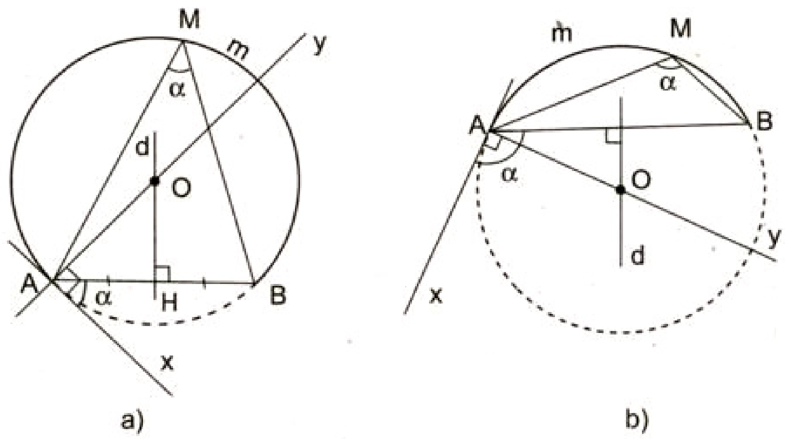
Theo dự đoán trên, ta sẽ chứng minh quỹ tích cần tìm là hai cung tròn.

*Chứng minh*

a) *Phần thuận* (h. 40).

Trước hết, ta hãy xét một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB.

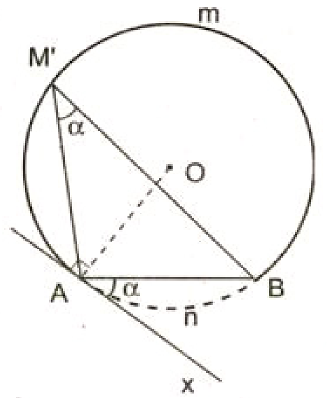
Giả sử M là điểm thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ và nằm trong nửa mặt phẳng đang xét. Xét cung AmB đi qua ba điểm A, M, B.



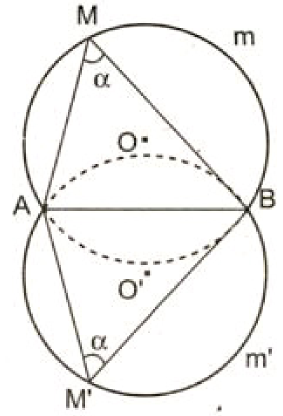

*Hình 40*

Ta sẽ chứng minh tâm O của đường tròn chứa cung đó là một điểm cố định (không phụ thuộc M). Thực vậy, trong nửa mặt phẳng bờ AB không chứa M, kẻ tia tiếp tuyến Ax của đường tròn đi qua ba điểm A, M, B thì góc tạo bởi Ax và AB bằng α, do đó tia Ax cố định. Tâm O phải nằm trên đường thẳng Ay vuông góc với Ax tại A. Mặt khác, O phải nằm trên đường trung trực d của đoạn AB. Từ đó giao điểm O của d và Ay là điểm cố định, không phụ thuộc M (vì $0^o < \alpha < 180^o$ nên Ay không vuông góc với AB và do đó Ay luôn cắt d tại đúng một điểm). Vậy M thuộc cung tròn AmB cố định.

b) *Phần đảo.* Lấy M' là một điểm thuộc cung AmB (h. 41), ta phải chứng minh $\widehat{AM'B} = \alpha$. Thật vậy, vì $\widehat{AM'B}$ là góc nội tiếp, $\widehat{xAB}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, hai góc này cùng chắn cung AnB nên $\widehat{AM'B} = \widehat{xAB} = \alpha$.



*Hình 41*



*Hình 42*

Tương tự, trên nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét, ta còn có cung Am'B đối xứng với cung AmB qua AB cũng có tính chất như $\overset{\frown}{AmB}$ (h. 42).

Mỗi cung trên được gọi là một *cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng* AB, tức là cung mà với mọi điểm M thuộc cung đó, ta đều có $\widehat{AMB} = \alpha$.

c) *Kết luận.* Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^o < \alpha < 180^o$) cho trước thì *quỹ tích các điểm* M *thoả mãn* $\widehat{AMB} = \alpha$ *là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn* AB.

### ➢ *Chú ý*

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB.
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- Khi $\alpha = 90^o$ thì hai cung AmB và Am'B là hai nửa đường tròn đường kính AB. Như vậy ta có : *Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng* AB *cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính* AB.

• Trong hình 41, $\overset{\frown}{AmB}$ là cung chứa góc $\alpha$ thì $\overset{\frown}{AnB}$ là cung chứa góc $180^o - \alpha$.

***2) Cách vẽ cung chứa góc $\alpha$.*** (Xem hình 40a, b).

– Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

– Vẽ tia Ax tạo với AB góc $\alpha$.

– Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.

– Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.

$\overset{\frown}{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc $\alpha$.

## 2. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn *chứng minh* quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất $\mathcal{T}$ là một hình **H** nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

*Phần thuận :* Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình **H**.

*Phần đảo :* Mọi điểm thuộc hình **H** đều có tính chất $\mathcal{T}$.

*Kết luận :* Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình **H**.

(Thông thường với bài toán "Tìm quỹ tích..." ta nên dự đoán hình **H** trước khi chứng minh).

## Bài tập

**44.** Cho tam giác ABC vuông ở A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi A thay đổi.

**45.** Cho các hình thoi ABCD có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình thoi đó.

**46.** Dựng một cung chứa góc $55^o$ trên đoạn thẳng AB = 3 cm.

**47.** Gọi cung chứa góc $55^o$ ở bài tập 46 là $\overset{\frown}{AmB}$. Lấy điểm $M_1$ nằm bên trong và điểm $M_2$ nằm bên ngoài đường tròn chứa cung này sao cho $M_1$, $M_2$ và cung AmB nằm cùng một phía đối với đường thẳng AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AM_1B} > 55^o$ ; b) $\widehat{AM_2B} < 55^o$.

## Luyện tập

**48.** Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với các đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

**49.** Dựng tam giác ABC, biết BC = 6 cm, $\widehat{A} = 40^o$ và đường cao AH = 4 cm.

**50.** Cho đường tròn đường kính AB cố định, M là một điểm chạy trên đường tròn. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI = 2MB.

a) Chứng minh $\widehat{AIB}$ không đổi.

b) Tìm tập hợp các điểm I nói trên.

**51.** Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^o$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC'.

Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

**52.** "Góc sút" của quả phạt đền 11 mét là bao nhiêu độ ? Biết rằng chiều rộng cầu môn là 7,32 m. Hãy chỉ ra hai vị trí khác trên sân có cùng "góc sút" như quả phạt đền 11 mét.