

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ta đã biết, muốn giải một hệ phương trình hai ẩn, ta tìm cách quy về việc giải phương trình một ẩn. Mục đích đó cũng có thể đạt được bằng cách áp dụng quy tắc sau gọi là *quy tắc cộng đại số*.

1. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước sau :

Bước 1. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy *thay thế cho một trong hai phương trình của hệ* (và giữ nguyên phương trình kia).

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Ta áp dụng quy tắc cộng đại số để biến đổi hệ (I) như sau :

Bước 1. Cộng từng vế hai phương trình của (I), ta được phương trình $(2x - y) + (x + y) = 3$ hay $3x = 3$.

Bước 2. Dùng phương trình mới đó thay thế cho phương trình thứ nhất, ta được hệ $\begin{cases} 3x = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$; hoặc thay thế cho phương trình thứ hai, ta được

$$\text{hệ } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

?1 Áp dụng quy tắc cộng đại số để biến đổi hệ (I), nhưng ở bước 1, hãy trừ từng vế hai phương trình của hệ (I) và viết ra các hệ phương trình mới thu được.

• Sau đây, ta sẽ tìm cách sử dụng quy tắc cộng đại số để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Cách làm đó gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số*.

2. Áp dụng

1) Trường hợp thứ nhất

*(Các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau).

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình

$$(II) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

?2 Các hệ số của y trong hai phương trình của hệ (II) có đặc điểm gì ?

Từ đặc điểm đó, ta có thể giải hệ (II) như sau :

Cộng từng vế hai phương trình của hệ (II), ta được

$$3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do đó

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -3)$.

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình

$$(III) \begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

- ?3 a) Nếu nhận xét về các hệ số của x trong hai phương trình của hệ (III).
b) Áp dụng quy tắc cộng đại số, hãy giải hệ (III) bằng cách trừ từng vế hai phương trình của (III).

2) Trường hợp thứ hai

(Các hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình không bằng nhau và không đối nhau).

Ví dụ 4. Xét hệ phương trình

$$(IV) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

Ta sẽ tìm cách biến đổi để đưa hệ (IV) về trường hợp thứ nhất. Muốn vậy, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và hai vế của phương trình thứ hai với 3, ta có hệ tương đương :

$$(IV) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ 6x + 9y = 9 \end{cases}$$

- ?4 Giải tiếp hệ (IV) bằng phương pháp đã nêu ở trường hợp thứ nhất.
?5 Nếu một cách khác để đưa hệ phương trình (IV) về trường hợp thứ nhất ?

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- 1) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- 2) Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- 3) Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

20. a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$;
- d) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 0,3x + 0,5y = 3 \\ 1,5x - 2y = 1,5 \end{cases}$.
21. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$.

Luyện tập

22. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

$$\text{a) } \begin{cases} -5x + 2y = 4 \\ 6x - 3y = -7 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases}.$$

23. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases}$$

24. Giải các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3 \end{cases}.$$

25. Ta biết rằng : Một đa thức bằng đa thức 0 khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng 0. Hãy tìm các giá trị của m và n để đa thức sau (với biến số x) bằng đa thức 0 :

$$P(x) = (3m - 5n + 1)x + (4m - n - 10).$$

26. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau :

- a) A(2 ; -2) và B(-1 ; 3); b) A(-4 ; -2) và B(2 ; 1);
 c) A(3 ; -1) và B(-3 ; 2); d) A($\sqrt{3}$; 2) và B(0 ; 2).

27. Bằng cách đặt ẩn phụ (theo hướng dẫn), đưa các hệ phương trình sau về dạng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn rồi giải :

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$
 Hướng dẫn. Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$;

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$
 Hướng dẫn. Đặt $u = \frac{1}{x-2}$, $v = \frac{1}{y-1}$.