§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Phải chăng chỉ là quy về giải phương trình một ẩn ?

Nói chung, muốn giải một hệ phương trình hai ẩn, ta tìm cách biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới tương đương, trong đó một phương trình của nó chỉ còn một ẩn. Một trong các cách giải là áp dụng quy tắc sau gọi là *quy tắc thế.*

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau :

Bước 1. Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào *phương trình thứ hai* để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để *thay thế cho phương trình thứ hai* trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}.$$

Việc áp dụng quy tắc thế đối với hệ (I) như sau :

Bước 1. Từ phương trình đầu, biểu diễn x theo y, ta có $x = 3y + 2$ (*). Lấy kết quả này thế vào chỗ của x trong phương trình thứ hai thì được

$$-2(3y + 2) + 5y = 1.$$

Bước 2. Dùng phương trình vừa có, thay thế cho phương trình thứ hai của hệ và dùng (*) thay thế cho phương trình thứ nhất, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ -2(3y + 2) + 5y = 1 \end{cases}.$$

• Sau khi đã áp dụng quy tắc thế, ta thấy ngay có thể giải hệ (I) như sau :

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ -2(3y + 2) + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(-13\,;\,-5)$.

Cách giải như trên gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.*

2. Áp dụng

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\text{(II)}\ \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}.$$

Giải. Ta có (biểu diễn y theo x từ phương trình thứ nhất)

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2(2x - 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x - 6 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ (II) có nghiệm duy nhất là (2 ; 1).

?1 *Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế (biểu diễn y theo x từ phương trình thứ hai của hệ)*

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 3x - y = 16 \end{cases}.$$

➤ ***Chú ý***

Nếu trong quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của cả hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\text{(III)}\ \begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -2x + y = 3 \end{cases}.$$

Giải

+ Biểu diễn y theo x từ phương trình thứ hai, ta được $y = 2x + 3$.

+ Thế y trong phương trình đầu bởi $2x + 3$, ta có

$$4x - 2(2x + 3) = -6 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$. Vậy hệ (III) có vô số nghiệm. Cụ thể, tập nghiệm của nó cũng là tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $y = 2x + 3$. Do đó, hệ (III) có các nghiệm $(x\ ;\ y)$ tính bởi công thức

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

?2 *Bằng minh hoạ hình học, hãy giải thích tại sao hệ* (III) *có vô số nghiệm.*

?3 *Cho hệ phương trình*

$$\text{(IV)} \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 2y = 1 \end{cases}.$$

Bằng minh hoạ hình học và bằng phương pháp thế, chứng tỏ rằng hệ (IV) *vô nghiệm.*

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

1) Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

2) Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

12. a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$.

13. a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}$.

14. a) $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$; b) $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Luyện tập

15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (a^2 + 1)x + 6y = 2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = -1$; b) $a = 0$; c) $a = 1$.

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế (*các bài* 16 *và* 17) :

16. a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$.

17. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$; c) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$.

18. a) Xác định các hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$$

có nghiệm là (1 ; –2).

b) Cũng hỏi như vậy, nếu hệ phương trình có nghiệm là ($\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2}$).

19. Biết rằng : *Đa thức* P(x) *chia hết cho đa thức* x – a *khi và chỉ khi* P(a) = 0. Hãy tìm các giá trị của m và n sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho x + 1 và x – 3 :

$$P(x) = mx^3 + (m - 2)x^2 - (3n - 5)x - 4n.$$