

§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Có thể tìm nghiệm của một hệ phương trình bằng cách vẽ hai đường thẳng được không ?

1. Khái niệm về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Xét hai phương trình bậc nhất hai ẩn $2x + y = 3$ và $x - 2y = 4$.

?1 Kiểm tra rằng cặp số $(x ; y) = (2 ; -1)$ vừa là nghiệm của phương trình thứ nhất, vừa là nghiệm của phương trình thứ hai.

Ta nói rằng cặp số $(2; -1)$ là *một nghiệm của hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Tổng quát, cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$. Khi đó, ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là *một nghiệm* của hệ (I).

Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) *vô nghiệm*.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm (tìm *tập nghiệm*) của nó.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

?2 *Tìm từ thích hợp để điền vào chỗ trống (...) trong câu sau :*

Nếu điểm M thuộc đường thẳng $ax + by = c$ thì toạ độ $(x_0; y_0)$ của điểm M là một ... của phương trình $ax + by = c$.

Từ đó suy ra :

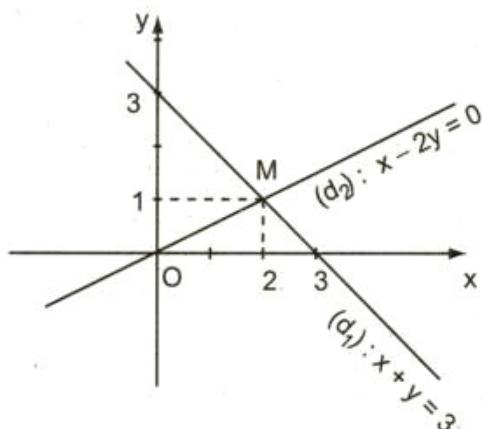
Trên mặt phẳng toạ độ, nếu gọi (d) là đường thẳng $ax + by = c$ và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$ thì điểm chung (nếu có) của hai đường thẳng ấy có toạ độ là nghiệm chung của hai phương trình của (I). Vậy, *tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của (d) và (d')*.

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2) .

Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng một hệ trục toạ độ (h. 4), ta thấy chúng



Hình 4

cắt nhau tại một điểm duy nhất M. Ta xác định được tọa độ của điểm M là (2 ; 1). (Thử lại, ta thấy (2 ; 1) là một nghiệm của hệ).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x ; y) = (2 ; 1).

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Do $3x - 2y = -6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$ nên tập nghiệm của phương trình thứ nhất được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_1) : y = \frac{3}{2}x + 3$.

Tương tự, tập nghiệm của phương trình thứ hai được biểu diễn bởi đường thẳng

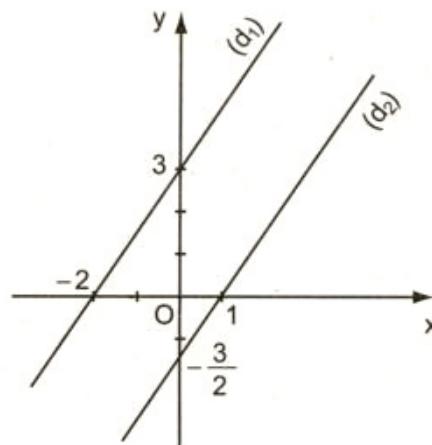
$$(d_2) : y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có tung độ gốc khác nhau và có cùng hệ số góc bằng $\frac{3}{2}$ nên song song với nhau (h. 5).

Chúng không có điểm chung. Điều đó chứng tỏ hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$



Hình 5

Ta thấy tập nghiệm của hai phương trình trong hệ được biểu diễn bởi cùng một đường thẳng $y = 2x - 3$. Vậy, *mỗi nghiệm của một trong hai phương trình của hệ cũng là một nghiệm của phương trình kia*.

?3 Hệ phương trình trong ví dụ 3 có bao nhiêu nghiệm ? Vì sao ?

Một cách tổng quát, ta có :

Đối với hệ phương trình (I), ta có :

- Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
- Nếu (d) song song với (d') thì hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm.

➤ **Chú ý.** Từ kết quả trên ta thấy, có thể đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (I) bằng cách xét vị trí tương đối của các đường thẳng $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$.

3. Hệ phương trình tương đương

Tương tự như đối với phương trình, ta có :

ĐỊNH NGHĨA

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ta cũng dùng kí hiệu " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương của hai hệ phương trình, chẳng hạn ta viết

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Bài tập

4. Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$.

5. Đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau bằng hình học :

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$.

6. Đố

Bạn Nga nhận xét : Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm thì luôn tương đương với nhau.

Bạn Phương khẳng định : Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cùng có vô số nghiệm thì cũng luôn tương đương với nhau.

Theo em, các ý kiến đó đúng hay sai ? Vì sao ? (có thể cho một ví dụ hoặc minh họa bằng đồ thị).

Luyện tập

7. Cho hai phương trình $2x + y = 4$ và $3x + 2y = 5$.

- Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình trên.
- Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trong cùng một hệ trục tọa độ, rồi xác định nghiệm chung của chúng.

8. Cho các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}.$$

Trước hết, hãy đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình trên (giải thích rõ lí do). Sau đó, tìm tập nghiệm của các hệ đã cho bằng cách vẽ hình.

9. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}.$$

10. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao :

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 4y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3} \\ x - 3y = 2 \end{cases}.$$

11. Nếu tìm thấy hai nghiệm phân biệt của một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (nghĩa là hai nghiệm được biểu diễn bởi hai điểm phân biệt) thì ta có thể nói gì về số nghiệm của hệ phương trình đó ? Vì sao ?