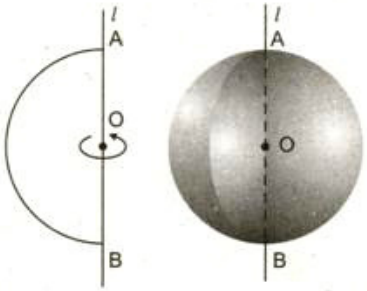
§3. Hình cầu.
Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (h. 103).

• Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên *mặt cầu*.

• Điểm O được gọi là *tâm*, R là *bán kính* của hình cầu hay mặt cầu đó.

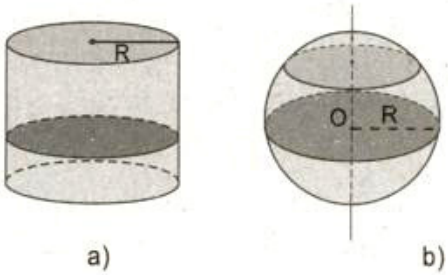


Hình 103

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần mặt phẳng nằm trong hình đó (mặt cắt) là một hình tròn.

?1 *Cắt một hình trụ hoặc một hình cầu bởi mặt phẳng vuông góc với trục, ta được hình gì ? Hãy điền vào bảng (chỉ với các từ "có", "không")* (h. 104).



Hình 104

Hình / Mặt cắt	Hình trụ	Hình cầu
Hình chữ nhật		
Hình tròn bán kính R		
Hình tròn bán kính nhỏ hơn R		

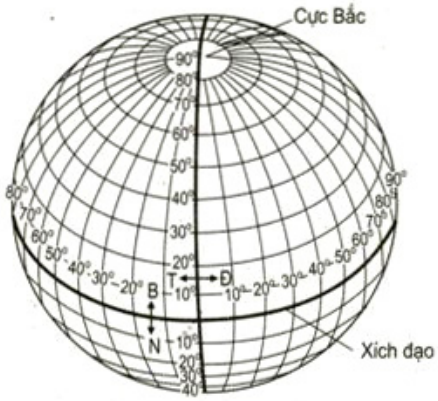
Quan sát hình 104, ta thấy :

• Khi cắt hình cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn.

• Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một đường tròn :

– Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm *(gọi là đường tròn lớn).*

– Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.



Hình 105

Ví dụ. Trái Đất được xem như một hình cầu (h. 105), xích đạo là một đường tròn lớn.

3. Diện tích mặt cầu

Ở lớp dưới, ta đã biết công thức tính diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2$$

(R là bán kính, d là đường kính của mặt cầu).

Ví dụ. Diện tích một mặt cầu là 36 cm^2. Tính đường kính của một mặt cầu thứ hai có diện tích gấp ba lần diện tích mặt cầu này.

Giải. Gọi d là độ dài đường kính của mặt cầu thứ hai, ta có

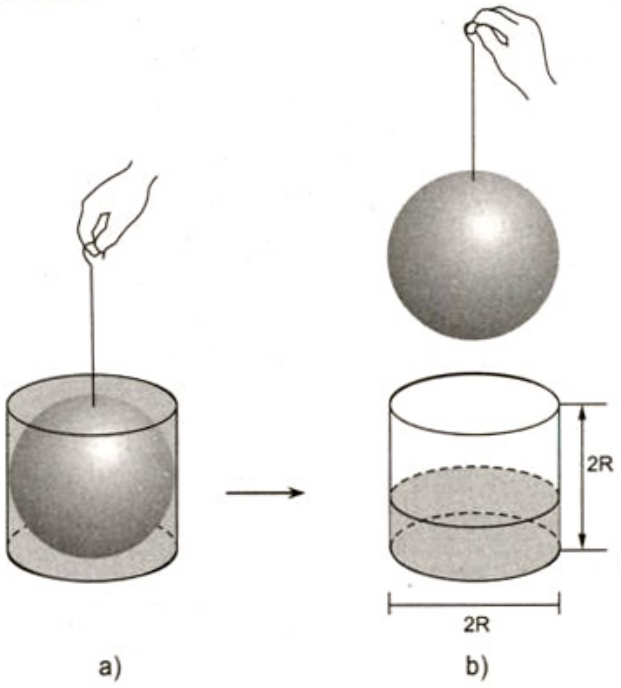
$$\pi d^2 = 3.36 = 108. \text{ Suy ra } \quad d^2 \approx \frac{108}{3,14} \approx 34,39.$$

Vậy $d \approx 5,86$ cm.

4. Thể tích hình cầu

Một hình cầu có bán kính R và một cốc thuỷ tinh dạng hình trụ có các kích thước như hình 106.

Ở hình 106a, hình cầu nằm khít trong hình trụ có đầy nước. Ta nhấc nhẹ hình cầu ra khỏi cốc.



Hình 106

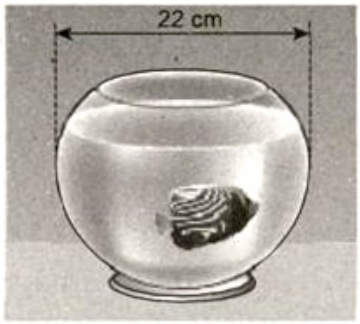
Đo độ cao cột nước còn lại ở hình 106b, ta thấy độ cao này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình trụ. Do đó, thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ, hay

$$V = \frac{2}{3}.2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ta có công thức tính thể tích hình cầu bán kính R là

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Ví dụ. Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh (xem hình 107) ? Liễn được xem như một phần mặt cầu. Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu.



Hình 107

Giải. Thể tích hình cầu được tính theo công thức

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ hay } V = \frac{1}{6}\pi d^3 \text{ (d là đường kính).}$$

(22 cm = 2,2 dm).

Lượng nước ít nhất cần phải có là

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (2,2)^3 \approx 3,71 \text{ (dm}^3\text{)} = 3,71 \text{ (lít).}$$

Bài tập

30. Nếu thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}$ cm^3 thì trong các kết quả sau đây, kết quả nào là bán kính của nó $\left(\text{lấy } \pi \approx \frac{22}{7}\right)$?

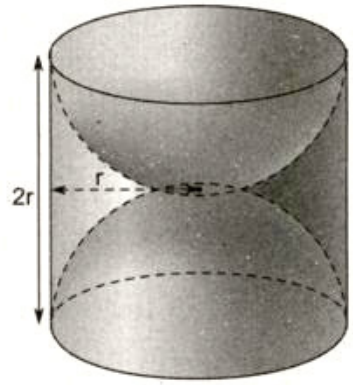
(A) 2 cm ; (B) 3 cm ; (C) 5 cm ; (D) 6 cm ;

(E) Một kết quả khác.

31. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau :

Bán kính hình cầu	0,3 mm	6,21 dm	0,283 m	100 km	6 hm	50 dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

32. Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy là r, chiều cao 2r (đơn vị : cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình 108. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).



Hình 108

33. *Dụng cụ thể thao*

Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) :

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bi-a
Đường kính	42,7 mm		6,5 cm	40 mm	61 mm
Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích					
Thể tích					

34. *Khinh khí cầu của nhà Mông-gôn-fi-ê (Montgolfier)*

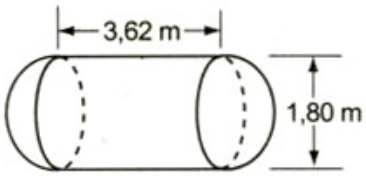
Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 m. Hãy tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 109

Luyện tập

35. Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (h. 110).

Hãy tính thể tích của bồn chứa theo các kích thước cho trên hình vẽ.

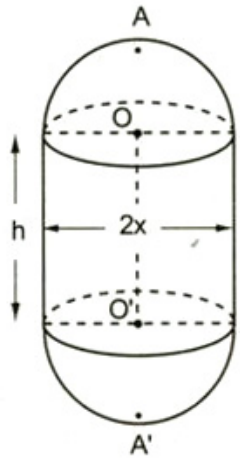


Hình 110

36. Một chi tiết máy gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu với các kích thước đã cho trên hình 111 (đơn vị : cm).

a) Tìm một hệ thức giữa x và h khi AA' có độ dài không đổi và bằng 2a.

b) Với điều kiện ở a), hãy tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết máy theo x và a.



Hình 111

37. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa đường tròn tại A và B. Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a) Chứng minh rằng MON và APB là hai tam giác vuông đồng dạng.

b) Chứng minh $AM.BN = R^2$.

c) Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \frac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh AB sinh ra.

Bài đọc thêm

VỊ TRÍ CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MẶT CẦU – TOẠ ĐỘ ĐỊA LÍ

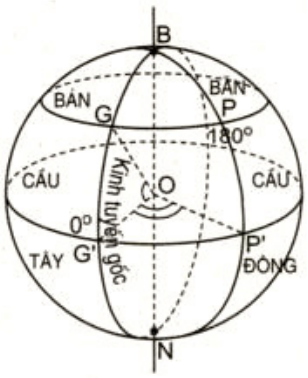
Quan sát hình 112, 113.

• Mỗi đường tròn là giao của mặt cầu và mặt phẳng vuông góc với đường thẳng NB gọi là một *vĩ tuyến*.

• Xích đạo là vĩ tuyến lớn nhất chia bề mặt Trái Đất (Địa cầu) ra hai nửa bằng nhau. Nửa cầu có cực bắc (B) là *bán cầu Bắc*, nửa cầu có cực nam (N) là *bán cầu Nam.*

• Mỗi đường tròn lớn có đường kính NB gọi là một *vòng kinh tuyến*. Mỗi nửa vòng kinh tuyến nối hai mút N, B gọi là một kinh tuyến.

• Theo quy ước quốc tế, người ta chọn kinh tuyến đi qua đài thiên văn Grin-uych (Greenwich) (ngoại ô Luân Đôn – nước Anh) làm *kinh tuyến gốc*.



Hình 112

Xích đạo được lấy làm *vĩ tuyến gốc*.

Mặt phẳng qua kinh tuyến gốc chia Trái Đất thành hai nửa bằng nhau. Một nửa là bán cầu Đông, nửa kia là bán cầu Tây.

Kinh tuyến gốc cắt xích đạo ở G'.

Nếu P là một điểm của bề mặt Địa cầu thì vĩ tuyến qua P cắt kinh tuyến gốc ở G, kinh tuyến qua P cắt xích đạo ở điểm P'. Khi đó :

Số đo góc G'OP' gọi là *kinh độ* của P, số đo góc G'OG gọi là *vĩ độ* của P.

Tuỳ theo vị trí của P ở phía đông hay phía tây đối với kinh tuyến gốc, ở phía bắc hay phía nam đối với xích đạo mà ta cần chỉ rõ thêm : kinh độ đông hay kinh độ tây, vĩ độ bắc hay vĩ độ nam.

Theo quy ước, ta viết toạ độ địa lí của một điểm, chẳng hạn Hà Nội, như sau :

Toạ độ địa lí của Hà Nội

$$\begin{cases} 105^{o}\ 48' \text{ Đông} \\ 20^{o}\ 01' \text{ Bắc} \end{cases}$$

(kinh độ viết trên, vĩ độ viết dưới).

Hình 113