Chương III – HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trở lại bài toán cổ quen thuộc sau đây :

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.

Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó ?

Ở lớp 8, ta đã biết cách giải bài toán trên bằng cách lập phương trình bậc nhất một ẩn. Muốn vậy, ta chọn một đại lượng chưa biết, số gà chẳng hạn, làm ẩn x rồi dựa vào các mối quan hệ giữa các đại lượng để lập nên một phương trình với ẩn x.

Nhưng trong bài toán trên, ngoài đại lượng chưa biết là số gà, ta thấy còn có một đại lượng chưa biết khác là số chó. Nếu kí hiệu x là số gà và y là số chó thì :

– Giả thiết *có tất cả 36 con vừa gà vừa chó* được mô tả bởi hệ thức $x + y = 36$.

– Giả thiết *có tất cả 100 chân* được mô tả bởi hệ thức $2x + 4y = 100$.

Các hệ thức trên là những ví dụ về *phương trình bậc nhất hai ẩn.*

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với các phương trình có hai ẩn và sẽ thấy chúng được ứng dụng thế nào để giải các bài toán tương tự bài toán trên.

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

> Tập nghiệm của một phương trình bậc nhất hai ẩn có gì mới lạ ?

1. Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn

Ở lớp 8, chúng ta đã học phương trình bậc nhất một ẩn. Trong thực tế, còn có các tình huống dẫn đến phương trình có nhiều hơn một ẩn. Như đã thấy, bài toán mở đầu của chương này đã dẫn đến các phương trình bậc nhất hai ẩn : $x + y = 36$ và $2x + 4y = 100$.

• Một cách tổng quát, *phương trình bậc nhất hai ẩn* x *và* y *là hệ thức dạng*

$$ax + by = c, \tag{1}$$

trong đó a, b *và* c *là các số đã biết* ($a \neq 0$ *hoặc* $b \neq 0$).

Ví dụ 1. Các phương trình $2x - y = 1$, $3x + 4y = 0$, $0x + 2y = 4$, $x + 0y = 5$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

• Trong phương trình (1), nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì *cặp số* $(x_0 ; y_0)$ *được gọi là một nghiệm của phương trình* (1).

Ta cũng viết : Phương trình (1) có nghiệm là $(x ; y) = (x_0 ; y_0)$.

Ví dụ 2. Cặp số (3 ; 5) là một nghiệm của phương trình $2x - y = 1$ vì $2.3 - 5 = 1$. (Với cách nói này, ta luôn hiểu rằng $x = 3$ và $y = 5$.)

➢ ***Chú ý.*** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0; y_0)$.

?1 *a) Kiểm tra xem các cặp số* (1 ; 1) *và* (0,5 ; 0) *có là nghiệm của phương trình* $2x - y = 1$ *hay không.*

b) Tìm thêm một nghiệm khác của phương trình $2x - y = 1$.

?2 *Nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình* $2x - y = 1$.

• Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn, khái niệm *tập nghiệm* và khái niệm *phương trình tương đương* cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn. Ngoài ra, ta vẫn có thể áp dụng *quy tắc chuyển vế* và *quy tắc nhân* đã học để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

• Xét phương trình

$$2x - y = 1. \tag{2}$$

Chuyển vế, ta có $\quad 2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

?3 *Điền vào bảng sau và viết ra sáu nghiệm của phương trình* (2) *:*

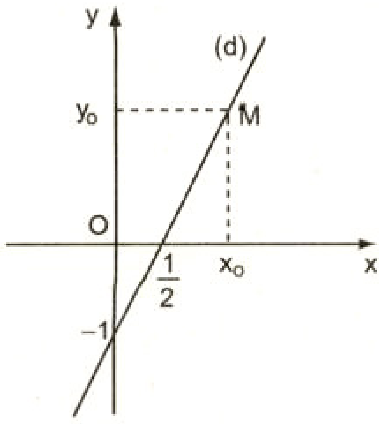
x	−1	0	0,5	1	2	2,5
y = 2x − 1						

Một cách tổng quát, nếu cho x một giá trị bất kì thì cặp số (x ; y), trong đó y = 2x – 1, là một nghiệm của phương trình (2). Như vậy, tập nghiệm của (2) là

$$S = \{(x\ ;\ 2x - 1) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Ta nói rằng phương trình (2) có nghiệm tổng quát là (x ; 2x – 1) với x tuỳ ý ($x \in \mathbf{R}$), hoặc

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}. \qquad (3)$$



Hình 1

Có thể chứng minh rằng : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, *tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình (2) là đường thẳng* y = 2x – 1 (đường thẳng (d) trên hình 1). Ta nói :

Tập nghiệm của (2) *được biểu diễn bởi đường thẳng* (d), hay *đường thẳng* (d) *được xác định bởi phương trình* 2x – y = 1.

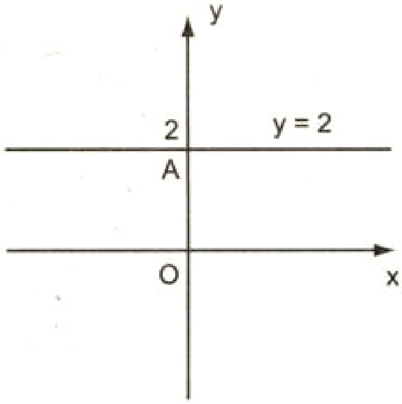
Đường thẳng (d) còn gọi là đường thẳng 2x – y = 1 và được viết gọn là

$$(d) : 2x - y = 1.$$

• Xét phương trình 0x + 2y = 4. (4)

Vì (4) nghiệm đúng với mọi x và y = 2 nên nó có nghiệm tổng quát là (x ; 2) với $x \in \mathbf{R}$, hay

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2 \end{cases}.$$



Hình 2

Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của (4) được biểu diễn bởi đường thẳng đi qua điểm A(0 ; 2) và song song với trục hoành (h. 2). Ta gọi đó là đường thẳng y = 2.

• Xét phương trình 4x + 0y = 6. (5)

Vì (5) nghiệm đúng với x = 1,5 và với mọi y nên nó có nghiệm tổng quát là (1,5 ; y) với $y \in \mathbf{R}$, hay

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

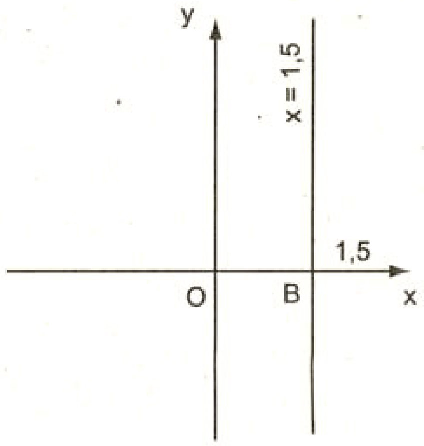
Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của (5) được biểu diễn bởi đường thẳng đi qua điểm B(1,5 ; 0) và song song với trục tung (h. 3). Ta gọi đó là đường thẳng $x = 1,5$.

Một cách tổng quát, ta có :

1) Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$, kí hiệu là (d).

2) Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là *đồ thị của hàm số bậc nhất*

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$



Hình 3

Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $ax = c$ hay $x = \frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.

Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $by = c$ hay $y = \frac{c}{b}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

Bài tập

1. Trong các cặp số (−2 ; 1), (0 ; 2), (−1 ; 0), (1,5 ; 3) và (4 ; −3), cặp số nào là nghiệm của phương trình :

a) $5x + 4y = 8$?   b) $3x + 5y = -3$?

2. Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó :

a) $3x - y = 2$;   b) $x + 5y = 3$;

c) $4x - 3y = -1$;   d) $x + 5y = 0$;

e) $4x + 0y = -2$;   f) $0x + 2y = 5$.

3. Cho hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ toạ độ. Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết toạ độ của nó là nghiệm của các phương trình nào.

Có thể em chưa biết ?

Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn dạng

$$ax + by = c \ (a, b, c \in \mathbf{Z}), \qquad (1)$$

người ta còn đặt vấn đề tìm các *nghiệm nguyên* của nó. Tiêu biểu trong lĩnh vực này là nhà toán học Hi Lạp Đi-ô-phăng (Diophantus, khoảng năm 250). Ở Ấn Độ, A-ri-a-ba-ta (Aryabhata, khoảng 476 – 550) cũng đã quan tâm đến việc tìm các nghiệm nguyên của phương trình này ; nhưng người đã cho lời giải tổng quát của bài toán là Bra-ma-gup-ta (Bramahgupta, khoảng 598 – 660). Ngày nay, ta đã biết lời giải của bài toán này qua hai mệnh đề sau :

1) Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b.

2) Ngược lại, nếu c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b thì (1) luôn có nghiệm nguyên. Trong trường hợp này, ta có thể giả thiết rằng a, b nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nếu $(x_0 \ ; \ y_0)$ là một nghiệm nguyên của (1) thì công thức sau cho tất cả các nghiệm nguyên của (1) :

$$\begin{cases} x = x_0 + tb \\ y = y_0 - ta \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{Z}).$$

Để thấy được ý nghĩa hình học của bài toán này, trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi các điểm có toạ độ nguyên là các *điểm nguyên*. Khi đó, bài toán trên có nghĩa là : Tìm tất cả các điểm nguyên trên đường thẳng ax + by = c.