

§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương trình trùng phương

Phương trình *trùng phương* là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Nhận xét. Phương trình trên không phải là phương trình bậc hai, song có thể đưa nó về phương trình bậc hai bằng cách *đặt ẩn phụ*. Chẳng hạn, nếu đặt $x^2 = t$ thì ta được phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. (1)

Giải

– Đặt $x^2 = t$. Điều kiện là $t \geq 0$. Ta được một phương trình bậc hai đối với ẩn t

$$t^2 - 13t + 36 = 0. \quad (2)$$

– Giải phương trình (2) : $\Delta = 169 - 144 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, $t_1 = \frac{13-5}{2} = 4$ và $t_2 = \frac{13+5}{2} = 9$. Cả hai giá trị 4 và 9 đều thoả mãn điều kiện $t \geq 0$.

• Với $t = t_1 = 4$, ta có $x^2 = 4$. Suy ra $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

• Với $t = t_2 = 9$, ta có $x^2 = 9$. Suy ra $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm : $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

?1 Giải các phương trình trùng phương :

a) $4x^4 + x^2 - 5 = 0$;

b) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ở lớp 8 ta đã biết, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau :

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình ;

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức ;

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ;

Bước 4. Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

?2 Giải phương trình $\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{x - 3}$ (3)

bằng cách điền vào các chỗ trống (...) và trả lời các câu hỏi.

– Điều kiện : $x \neq \dots$

– Khử mẫu và biến đổi, ta được : $x^2 - 3x + 6 = \dots \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

– Nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ là : $x_1 = \dots$; $x_2 = \dots$.
 Hỏi x_1 có thoả mãn điều kiện nói trên không ? Tương tự, đối với x_2 ?
 Vậy nghiệm của phương trình đã cho là :

3. Phương trình tích

Ví dụ 2. Giải phương trình : $(x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$. (4)

Giải. $(x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ hoặc $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Giải hai phương trình này, ta được các nghiệm của phương trình :

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -3.$$

? Giải phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0.$$

Bài tập

34. Giải các phương trình trùng phương :

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$; c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$.

35. Giải các phương trình :

a) $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$; b) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$;

c) $\frac{4}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)(x+2)}$.

36. Giải các phương trình :

a) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$; b) $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.

Luyện tập

37. Giải phương trình trùng phương.

a) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$; b) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$;

c) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$; d) $2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4$.

38. Giải các phương trình :

a) $(x-3)^2 + (x+4)^2 = 23 - 3x$;

b) $x^3 + 2x^2 - (x-3)^2 = (x-1)(x^2 - 2)$;

$$c) (x-1)^3 + 0,5x^2 = x(x^2 + 1,5); \quad d) \frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x-4}{3};$$

$$e) \frac{14}{x^2-9} = 1 - \frac{1}{3-x}; \quad f) \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}.$$

39. Giải phương trình bằng cách đưa về phương trình tích.

$$a) (3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0;$$

$$b) x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0;$$

$$c) (x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x;$$

$$d) (x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2.$$

40. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ.

$$a) 3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0;$$

$$b) (x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0;$$

$$c) x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7;$$

$$d) \frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3.$$

Hướng dẫn. a) Đặt $t = x^2 + x$, ta có phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$. Giải phương trình này, ta tìm được hai giá trị của t . Thay mỗi giá trị của t vừa tìm được vào đẳng thức $t = x^2 + x$, ta được một phương trình của ẩn x . Giải mỗi phương trình này sẽ tìm được giá trị của x .

$$d) \text{Đặt } \frac{x+1}{x} = t \text{ hoặc } \frac{x}{x+1} = t.$$