

## §2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

Parabol – một đường cong tuyệt đẹp



Ta đã biết, trên mặt phẳng toạ độ, đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  là tập hợp các điểm  $M(x ; f(x))$ . Để xác định một điểm của đồ thị, ta lấy một giá trị của  $x$  làm hoành độ còn tung độ là giá trị tương ứng của  $y = f(x)$ .

*Ví dụ 1.* Đồ thị của hàm số  $y = 2x^2$ .

Ở §1, ta có bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của  $x$  và  $y$ :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Trên mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm :  
 $A(-3; 18)$ ,  $B(-2; 8)$ ,  $C(-1; 2)$ ,  $O(0; 0)$ ,  
 $C'(1; 2)$ ,  $B'(2; 8)$ ,  $A'(3; 18)$ .

Đồ thị của hàm số  $y = 2x^2$  đi qua các điểm đó và có dạng như hình 6.

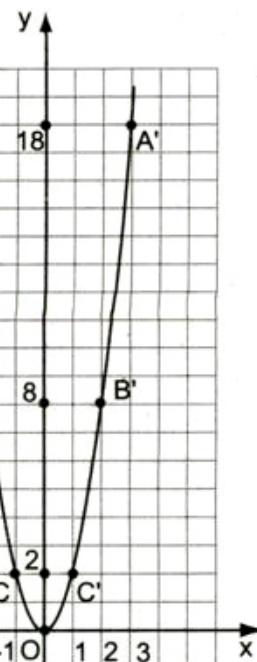
**?1** Hãy nhận xét một vài đặc điểm của đồ thị này bằng cách trả lời các câu hỏi sau (h. 6) :

- Đồ thị nằm ở phía trên hay phía dưới trục hoành ?

- Vị trí của cặp điểm  $A, A'$  đối với trục Oy ? Tương tự đối với các cặp điểm  $B, B'$  và  $C, C'$  ?

- Điểm nào là điểm thấp nhất của đồ thị ?

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .



Hình 6

Bảng sau cho một số giá trị tương ứng của x và y :

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

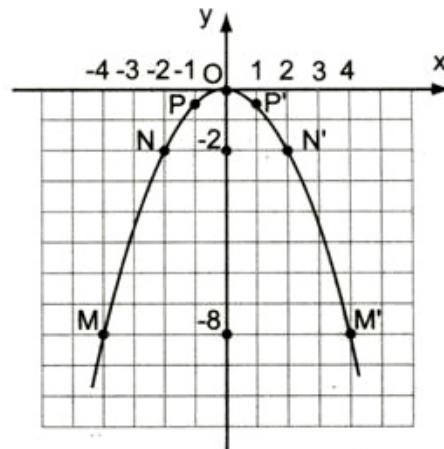
Trên mặt phẳng tọa độ lấy các điểm :

$M(-4; -8)$ ,  $N(-2; -2)$ ,  $P\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ ,

$O(0; 0)$ ,  $P'\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $N'(2; -2)$ ,

$M'(4; -8)$ , rồi lần lượt nối chúng để được một đường cong như hình 7.

Nếu lấy được càng nhiều điểm như thế thì càng dễ vẽ chính xác đồ thị.



Hình 7

**?2** Nhận xét một vài đặc điểm của đồ thị

và rút ra những kết luận, tương tự như đã làm đối với hàm số  $y = 2x^2$ .

Tổng quát, ta có nhận xét sau đây.

## Nhận xét

Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhặt trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.

Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

**?3** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .

a) Trên đồ thị của hàm số này, xác định điểm D có hoành độ bằng 3. Tìm tung độ của điểm D bằng hai cách : bằng đồ thị ; bằng cách tính y với  $x = 3$ . So sánh hai kết quả.

b) Trên đồ thị của hàm số này, xác định điểm có tung độ bằng -5. Có mấy điểm như thế ? Không làm tính, hãy ước lượng giá trị hoành độ của mỗi điểm.

### ➤ Chú ý

1) Vì đồ thị  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) luôn đi qua gốc toạ độ và nhặt trục Oy làm trục đối xứng nên khi vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một số điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

Chẳng hạn, chỉ cần tính giá trị của y ứng với  $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ , rồi nhờ đẳng thức  $ax^2 = a(-x)^2$ , ta suy ra ngay các giá trị của y ứng với các giá trị  $x = -1, x = -2, x = -3$ . Ví dụ, đối với hàm số  $y = \frac{1}{3}x^2$ , ta lập bảng giá trị ứng với  $x = 0 ; x = 1 ; x = 2 ; x = 3$ , rồi điền vào những ô trống những giá trị được chỉ rõ bởi các mũi tên :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$				0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3

2) Đồ thị minh họa một cách trực quan tính chất của hàm số. Chẳng hạn :

- Đồ thị của hàm số  $y = 2x^2$  cho thấy : Khi  $x$  âm và tăng thì đồ thị đi xuống (từ trái sang phải), chứng tỏ hàm số nghịch biến. Khi  $x$  dương và tăng thì đồ thị đi lên (từ trái sang phải), chứng tỏ hàm số đồng biến.

- Đồ thị của hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$  cho thấy : Khi  $x$  âm và tăng thì đồ thị đi lên, chứng tỏ hàm số đồng biến. Khi  $x$  dương và tăng thì đồ thị đi xuống, chứng tỏ hàm số nghịch biến.



### Có thể em chưa biết ?

Trong thực tế, ta thường gặp nhiều hiện tượng, vật thể có hình dạng parabol. Tia nước từ vòi phun lên cao rồi rơi xuống, trái bóng bay từ chân cầu thủ bóng đá (hoặc từ vợt của cầu thủ ten-nít) đến khi rơi xuống mặt đất, vạch ra những đường cong có hình dạng parabol. Khi ta ném một hòn đá, đường đi của hòn đá cũng có hình dạng parabol. Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có một cổng nhìn ra đường Giải Phóng, nó có hình dạng parabol và người ta thường gọi là "Cổng parabol".



Cổng trường  
Đại học Bách khoa Hà Nội

### Bài tập

4. Cho hai hàm số :  $y = \frac{3}{2}x^2$ ,  $y = -\frac{3}{2}x^2$ . Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox.

5. Cho ba hàm số :

$$y = \frac{1}{2}x^2; y = x^2; y = 2x^2.$$

- a) Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.
- b) Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ  $x = -1,5$  theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.
- c) Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ  $x = 1,5$  theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C'.
- d) Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị của x để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.



## Bài đọc thêm

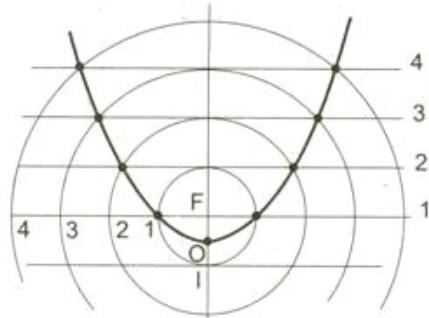
### VÀI CÁCH VẼ PARABOL

1) Vẽ parabol  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

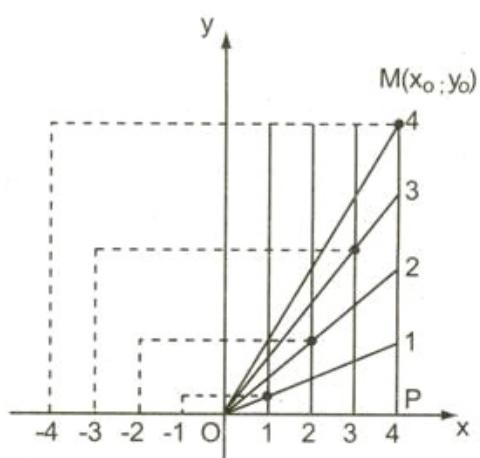
Trên trang vở có kẻ dòng, chọn khoảng cách giữa hai dòng làm đơn vị độ dài, vẽ những đường tròn cùng tâm F sao cho bán kính của chúng lần lượt bằng 1, 2, 3, ... . Đánh số thứ tự các đường tròn và các dòng như hình 8. Lấy bút chì đánh dấu các giao điểm của dòng thứ nhất với đường tròn có bán kính bằng 1 ; giao điểm của dòng thứ hai với đường tròn có bán kính bằng 2 ; ... . Nối các giao điểm này và trung điểm O của đoạn FI, ta được một parabol.

2) Vẽ parabol  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), biết một điểm khác điểm O của nó.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đã biết điểm  $M(x_0; y_0)$  khác điểm O thuộc parabol  $y = ax^2$ . Gọi P là hình chiếu của M lên Ox. Lần lượt chia các đoạn OP, PM thành n phần bằng nhau (trong hình 9,  $n = 4$ ). Qua các điểm



Hình 8



Hình 9

chia đoạn OP, kẻ những đường thẳng song song với Oy. Nối O với các điểm chia trên PM. Đánh số thứ tự các đường thẳng và các đoạn thẳng như trong hình 9. Lấy giao điểm của các cặp gồm một đường thẳng và một đoạn thẳng cùng thứ tự. Nối các giao điểm này, ta được một phần của parabol. Lấy thêm hình đối xứng của phần này qua trục Oy, ta được parabol  $y = ax^2$ .

### Luyện tập

6. Cho hàm số  $y = f(x) = x^2$ .

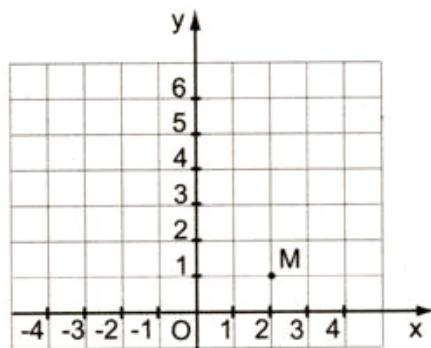
- a) Vẽ đồ thị của hàm số đó.
- b) Tính các giá trị  $f(-8)$ ;  $f(-1,3)$ ;  $f(-0,75)$ ;  $f(1,5)$ .
- c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị  $(0,5)^2$ ;  $(-1,5)^2$ ;  $(2,5)^2$ .
- d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{7}$ .

7. Trên mặt phẳng tọa độ (h.10), có một điểm M thuộc đồ thị của hàm số  $y = ax^2$ .

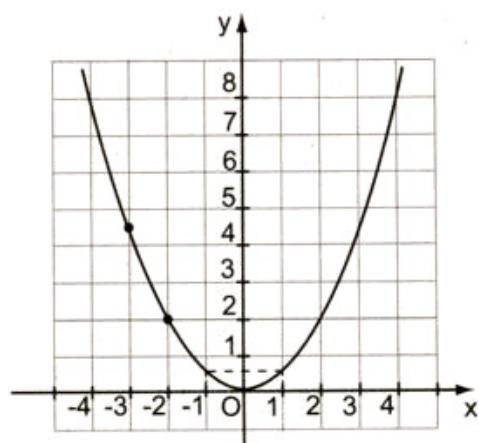
- a) Tìm hệ số a.
- b) Điểm A(4; 4) có thuộc đồ thị không?
- c) Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.

8. Biết rằng đường cong trong hình 11 là một parabol  $y = ax^2$ .

- a) Tìm hệ số a.
- b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ  $x = -3$ .
- c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ  $y = 8$ .



Hình 10



Hình 11

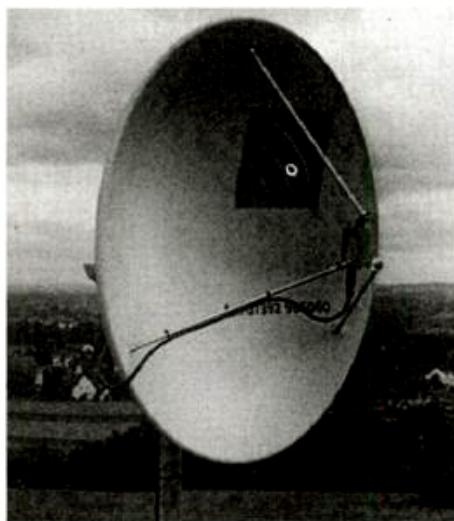
9. Cho hai hàm số  $y = \frac{1}{3}x^2$  và  $y = -x + 6$ .
- Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.
  - Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị đó.
10. Cho hàm số  $y = -0,75x^2$ . Qua đồ thị của hàm số đó, hãy cho biết khi  $x$  tăng từ  $-2$  đến  $4$  thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $y$  là bao nhiêu?



### Có thể em chưa biết ?

Các em đã nhìn thấy những anten parabol ; những pha đèn ôtô, xe máy, đèn pin,... Nếu đặt bóng đèn tại một điểm thích hợp trong pha thì các tia sáng đậm vào pha đèn rồi phản xạ thành những tia song song hướng ra phía trước. Do đó, ánh sáng tập trung chiếu về phía trước pha làm cho đèn sáng hơn. Trong chiến tranh thế giới lần thứ hai, người ta đã dùng đèn pha để chiếu sáng giúp lực lượng phòng không bắn máy bay địch bay trong đêm.

Tương tự, những anten parabol giúp cho việc thu, phát các tín hiệu có hiệu quả hơn.



*Anten parabol*