

## §6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

Nghiệm và hệ số của phương trình có mối liên quan kì diệu

### 1. Hệ thức Vi-ét

Trước hết chú ý rằng, nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm thì dù đó là hai nghiệm phân biệt hay nghiệm kép, ta đều có thể viết các nghiệm đó dưới dạng :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**?1** Hãy tính  $x_1 + x_2, x_1x_2$ .

Như vậy, ta đã thấy được một mối liên hệ giữa các nghiệm với các hệ số của phương trình bậc hai mà Vi-ét, nhà toán học người Pháp đã phát hiện vào đầu thế kỉ thứ XVII và ngày nay nó được phát biểu thành một định lí mang tên ông.

### ĐỊNH LÍ VI-ÉT

Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

*Áp dụng.* Nhờ định lí Vi-ét, nếu đã biết một nghiệm của phương trình bậc hai thì có thể suy ra nghiệm kia. Ta xét riêng hai trường hợp đặc biệt sau :

**?2** Cho phương trình  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ .

- Xác định các hệ số  $a, b, c$  rồi tính  $a + b + c$ .
- Chứng tỏ rằng  $x_1 = 1$  là một nghiệm của phương trình.
- Dùng định lí Vi-ét để tìm  $x_2$ .

Tổng quát

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có  $a + b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = 1$ , còn nghiệm kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

**?3** Cho phương trình  $3x^2 + 7x + 4 = 0$ .

- Chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$  của phương trình và tính  $a - b + c$ .
- Chứng tỏ  $x_1 = -1$  là một nghiệm của phương trình.
- Tìm nghiệm  $x_2$ .

Tổng quát

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có  $a - b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = -1$ , còn nghiệm kia là  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

**24** Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a)  $-5x^2 + 3x + 2 = 0$  ;

b)  $2004x^2 + 2005x + 1 = 0$ .

## 2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Giả sử hai số cần tìm có tổng bằng S và tích bằng P. Gọi một số là x thì số kia là S - x. Theo giả thiết ta có phương trình

$$x(S - x) = P \text{ hay } x^2 - Sx + P = 0. \quad (1)$$

Nếu  $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$  thì phương trình (1) có nghiệm. Các nghiệm này chính là hai số cần tìm.

Vậy :

Nếu hai số có **tổng** bằng S và **tích** bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Điều kiện để có hai số đó là  $S^2 - 4P \geq 0$ .

Áp dụng :

Ví dụ 1. Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 27, tích của chúng bằng 180.

Giải. Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 27x + 180 = 0$ .

Ta có :  $\Delta = 27^2 - 4.1.180 = 729 - 720 = 9$  ;  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$  ;

$$x_1 = \frac{27 + 3}{2} = 15, \quad x_2 = \frac{27 - 3}{2} = 12.$$

Vậy hai số cần tìm là 15 và 12.

**25** Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

Ví dụ 2. Tính nhẩm nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

Giải. Vì  $2 + 3 = 5$  ;  $2.3 = 6$  nên  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  là hai nghiệm của phương trình đã cho.

## Bài tập

25. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu  $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm (nếu có). Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a)  $2x^2 - 17x + 1 = 0$ ,  $\Delta = \dots$ ,  $x_1 + x_2 = \dots$ ,  $x_1x_2 = \dots$  ;

b)  $5x^2 - x - 35 = 0$ ,  $\Delta = \dots$ ,  $x_1 + x_2 = \dots$ ,  $x_1x_2 = \dots$  ;





## Luyện tập

29. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau :

a)  $4x^2 + 2x - 5 = 0$  ;

b)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$  ;

c)  $5x^2 + x + 2 = 0$  ;

d)  $159x^2 - 2x - 1 = 0$ .

30. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m.

a)  $x^2 - 2x + m = 0$  ;

b)  $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$ .

31. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a)  $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$  ;

b)  $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$  ;

c)  $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$  ;

d)  $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$  với  $m \neq 1$ .

32. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a)  $u + v = 42, uv = 441$  ;

b)  $u + v = -42, uv = -400$  ;

c)  $u - v = 5, uv = 24$ .

33. Chứng tỏ rằng nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$  thì tam thức  $ax^2 + bx + c$  phân tích được thành nhân tử như sau :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

*Áp dụng.* Phân tích đa thức thành nhân tử.

a)  $2x^2 - 5x + 3$  ;

b)  $3x^2 + 8x + 2$ .