

§9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

44. Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+2}} ; & \text{b) } \frac{x - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} ; \\ \text{c) } \frac{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} ; & \text{d) } \frac{\frac{x}{4} - 1 + \frac{3}{4x}}{\frac{x}{2} - \frac{6}{x} + \frac{1}{2}} \end{array}$$

45. Thực hiện các phép tính sau :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left(\frac{5x+y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy} \right) \cdot \frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2} ; \\ \text{b) } \frac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{x^2-y^2} \right) ; \\ \text{c) } \frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{4x^2-y^2} + \frac{1}{(2x+y)^2} \cdot \frac{4x^2+4xy+y^2}{16x} ; \\ \text{d) } \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x^2+4x+4} : \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} \end{array}$$

46. Tìm điều kiện của biến để giá trị của phân thức xác định :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5x^2 - 4x + 2}{20} ; & \text{b) } \frac{8}{x + 2004} ; \\ \text{c) } \frac{4x}{3x - 7} ; & \text{d) } \frac{x^2}{x + z} \end{array}$$

47. Phân tích mẫu thức của các phân thức sau thành nhân tử rồi tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức xác định :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5}{2x - 3x^2} ; & \text{b) } \frac{2x}{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} ; \\ \text{c) } \frac{-5x^2}{16 - 24x + 9x^2} ; & \text{d) } \frac{3}{x^2 - 4y^2} \end{array}$$

48. Có bạn nói rằng các phân thức $\frac{2x}{2x-2}$, $\frac{1}{x^2-2x+1}$, $\frac{5x^3}{(x-1)(x^2+1)}$ có cùng điều kiện của biến x . Điều đó đúng hay sai? Vì sao?
49. a) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác các số nguyên lẻ lớn hơn 5 và nhỏ hơn 10.
b) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác $\pm\sqrt{2}$.
50. **Đố.** Đố em tìm được một cặp phân thức của biến x mà khi giá trị của phân thức này bằng 0 thì giá trị của phân thức kia không xác định và ngược lại khi giá trị của phân thức kia bằng 0 thì giá trị của phân thức này không xác định. Em có thể tìm được bao nhiêu cặp phân thức như thế?
51. Tính giá trị của các biểu thức:
- a) $\frac{3x^2-x}{9x^2-6x+1}$ tại $x = -8$; b) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ tại $x = 1\,000\,001$.
52. Tìm điều kiện của các biến trong mỗi phân thức sau đây. Chứng minh rằng khi giá trị của phân thức xác định thì giá trị đó không phụ thuộc vào các biến x và y (nghĩa là chứng tỏ rằng có thể biến đổi phân thức đã cho thành một biểu thức không chứa x và y):
- a) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)(6x-6y)}$;
b) $\frac{2ax-2x-3y+3ay}{4ax+6x+9y+6ay}$, (a là hằng số khác $-\frac{3}{2}$).
53. **Đố.** Đố em tìm được giá trị của x để giá trị của phân thức $\frac{4x^2-4x^3+x^4}{x^3-2x^2}$ bằng:
- a) -2 ; b) 2 ; c) 0 .
54. Cho biểu thức $\frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$.
- a) Tìm điều kiện của biến x để giá trị của biểu thức được xác định.
b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1.
c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng $-\frac{1}{2}$.
d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng -3 .

55. Tìm x , biết :

$$\text{a) } \frac{2x+1}{x^2-2x+1} - \frac{2x+3}{x^2-1} = 0 ; \quad \text{b) } \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3} = 0.$$

56. Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi biểu thức sau bằng 0 :

$$\text{a) } \frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x+2)^2} ? \quad \text{b) } \frac{1}{x^2+x+1} + x - 1 ?$$

57. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{2}{x-3} ; & \text{b) } \frac{3}{x+2} ; \\ \text{c) } \frac{3x^3 - 4x^2 + x - 1}{x-4} ; & \text{d) } \frac{3x^2 - x + 1}{3x+2}. \end{array}$$

Hãy tham khảo cách giải câu d) được trình bày dưới đây để giải các câu còn lại :

Chia tử cho mẫu, ta tìm được thương $Q = x - 1$ và dư $R = 3$. Do đó

$$3x^2 - x + 1 = (3x + 2)(x - 1) + 3.$$

$$\text{Vì thế } \frac{3x^2 - x + 1}{3x + 2} = \frac{(3x + 2)(x - 1) + 3}{3x + 2} = x - 1 + \frac{3}{3x + 2}.$$

Nếu tồn tại giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức là số nguyên thì hiển nhiên $x - 1$ có giá trị nguyên và $\frac{3}{3x+2}$ cũng có giá trị nguyên. Do đó $3x + 2$ phải là ước của 3, mà tập hợp các ước của 3 là $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Nếu $3x + 2 = -3$ thì $3x = -5$ hay $x = -\frac{5}{3}$, không phải là số nguyên.

Nếu $3x + 2 = -1$ thì $3x = -3$ hay $x = -1$.

Nếu $3x + 2 = 1$ thì $3x = -1$ hay $x = -\frac{1}{3}$, không phải là số nguyên.

Nếu $3x + 2 = 3$ thì $3x = 1$ hay $x = \frac{1}{3}$, không phải là số nguyên.

Hiển nhiên với $x = -1$ thì giá trị của phân thức đã cho xác định vì khi đó $3x + 2 = -1 \neq 0$.

Vậy để biểu thức có giá trị nguyên thì x chỉ có thể có giá trị nguyên là -1 . Ngược lại, với $x = -1$ thì giá trị của biểu thức là -5 .

ĐS : $x = -1$.

Bài tập bổ sung

9.1. Biết rằng $Q = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức Q. Câu trả lời nào sau đây là sai ?

(A) Giá trị của Q tại $x = 4$ là $\frac{4 - 3}{4 + 3} = \frac{1}{7}$;

(B) Giá trị của Q tại $x = 1$ là $\frac{1 - 3}{1 + 3} = -\frac{1}{2}$;

(C) Giá trị của Q tại $x = 3$ là $\frac{3 - 3}{3 + 3} = 0$;

(D) Giá trị của Q tại $x = 3$ không xác định.

9.2. Với mỗi biểu thức sau, hãy tìm giá trị của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1 :

a) $\frac{1 + x^2 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$;

b) $\frac{1 + x^2 - \frac{4}{x+1}}{2 - \frac{4}{x+1}}$.