

Bài tập ôn chương II

58. Thực hiện các phép tính :

$$a) \frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} : \frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9} ;$$

$$b) \frac{2}{x - 2} - \frac{2}{x + 2} : \frac{x^2 + 4x + 4}{8} ;$$

$$c) \frac{3x}{1 - 3x} + \frac{2x}{3x + 1} : \frac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2} ;$$

$$d) \left(\frac{x}{x^2 - 25} - \frac{x - 5}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} + \frac{x}{5 - x} ;$$

$$e) \left(\frac{x^2 + xy}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) : \left(\frac{1}{x - y} - \frac{2xy}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} \right).$$

59. Chứng minh đẳng thức :

$$a) \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x+1}{2x};$$

$$b) \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{3x} - x - 1 = \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x-1};$$

$$c) \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^3} = \frac{x}{x-1}.$$

60. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ thành phân thức :

$$a) \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}};$$

$$b) \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{x+1}}{\frac{9-x^2}{x^2+2x+1}}.$$

61. Một phân thức có giá trị bằng 0 khi giá trị của tử thức bằng 0 còn giá trị của mẫu thức khác 0. Ví dụ giá trị của phân thức $\frac{x^2 - 25}{x+1} = 0$ khi $x^2 - 25 = 0$ và $x+1 \neq 0$ hay $(x-5)(x+5) = 0$ và $x \neq -1$. Vậy giá trị của phân thức này bằng 0 khi $x = \pm 5$.

Tìm các giá trị của x để giá trị của mỗi phân thức sau bằng 0 :

$$a) \frac{98x^2 - 2}{x-2};$$

$$b) \frac{3x-2}{x^2+2x+1}.$$

62. Đối với mỗi biểu thức sau, hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định :

$$a) \frac{\frac{2x-3}{x-1}}{x+2};$$

$$b) \frac{2x^2+1}{\frac{x}{x-1}};$$

$$c) \frac{\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}}{x};$$

$$d) \frac{\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}}{x-5}.$$

63. Tìm giá trị của x để giá trị của các biểu thức trong bài tập 62 bằng 0.

64. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định và chứng minh rằng với điều kiện đó biểu thức không phụ thuộc vào biến :

$$\text{a) } \frac{x - \frac{1}{x}}{x^2 + 2x + 1 - \frac{2x + 2}{x}}; \quad \text{b) } \frac{\frac{x}{2x + 2} + \frac{1}{x - 1}}{\frac{x - 1}{x^2 - 1}};$$

$$\text{c) } \frac{1}{x - 1} - \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right);$$

$$\text{d) } \left(\frac{x}{x^2 - 36} - \frac{x - 6}{x^2 + 6x} \right); \frac{2x - 6}{x^2 + 6x} + \frac{x}{6 - x}.$$

65. Chứng minh rằng :

a) Giá trị của biểu thức $\left(\frac{x + 1}{x} \right)^2 : \left[\frac{x^2 + 1}{x^2} + \frac{2}{x + 1} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right]$ bằng 1 với mọi giá trị $x \neq 0$ và $x \neq -1$;

b) Giá trị của biểu thức $\frac{x}{x - 3} - \frac{x^2 + 3x}{2x + 3} \cdot \left(\frac{x + 3}{x^2 - 3x} - \frac{x}{x^2 - 9} \right)$ bằng 1 khi $x \neq 0, x \neq -3, x \neq 3, x \neq -\frac{3}{2}$.

66. Chú ý rằng nếu $c > 0$ thì $(a + b)^2 + c$ và $(a - b)^2 + c$ đều dương với mọi a, b .

Áp dụng điều này chứng minh rằng :

- a) Với mọi giá trị của x khác ± 1 , biểu thức

$$\frac{x + 2}{x - 1} \cdot \left(\frac{x^3}{2x + 2} + 1 \right) - \frac{8x + 7}{2x^2 - 2}$$

luôn luôn có giá trị dương ;

- b) Với mọi giá trị của x khác 0 và khác -3 , biểu thức :

$$\frac{1 - x^2}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{x + 3} - 1 \right) + \frac{3x^2 - 14x + 3}{x^2 + 3x}$$

luôn luôn có giá trị âm.

67. Chú ý rằng vì $(x + a)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x và $(x + a)^2 = 0$ khi $x = -a$ nên $(x + a)^2 + b \geq b$ với mọi giá trị của x và $(x + a)^2 + b = b$ khi $x = -a$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $(x + a)^2 + b$ bằng b khi $x = -a$. Áp dụng điều này giải các bài tập sau :

a) Rút gọn rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{x^2}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x} - 4 \right) + 3$$

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

b) Rút gọn rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2} \right) - \frac{x^2+6x+4}{x}$$

có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất ấy.

Bài tập bổ sung

II.1. (Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, Miền Bắc năm 1963)

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức sau tại $x = -1,76$ và $y = \frac{3}{25}$:

$$P = \left[\left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x} \right] : \frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

II.2. (Đề thi học sinh giỏi, lớp 8 toàn quốc năm 1980). Thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$