# §1 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

## I – MỤC TIÊU

Học sinh cần :

– Hiểu được : Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$ với $a$, $b$ không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình như thế là phương trình của một đường thẳng nào đó.

– Viết được đúng phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến cho trước.

– Biết cách xác định vectơ pháp tuyến của đường thẳng khi cho phương trình tổng quát của nó, viết và hiểu phương trình đường thẳng trong những trường hợp đặc biệt.

– Xác định được vị trí tương đối giữa hai đường thẳng và biết cách tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng khi biết phương trình tổng quát của chúng.

## II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

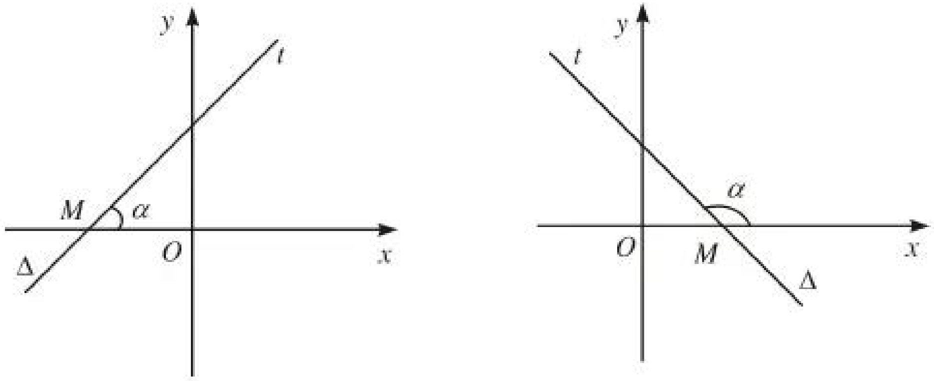
**1.** Khi học Đại số, học sinh đã biết rằng đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng. Tuy nhiên, điều ngược lại là không đúng, đường thẳng song song với trục tung hay trục hoành không phải là đồ thị của hàm số bậc nhất. Một nội dung cơ bản của §1 là : Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ là tập hợp các điểm có toạ độ $(x\ ;\ y)$ thoả mãn phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by + c = 0$ với $a$, $b$ không đồng thời bằng 0. Tuy nhiên khi trình bày nội dung này, để giảm tải, trong SGK chỉ nêu phần thuận mà không đề cập đến phần đảo : "Phương trình $ax + by + c = 0$ với $a$, $b$ không đồng thời bằng 0 là phương trình của một đường thẳng". Chứng minh phần đảo đó như sau :

Do $a$, $b$ không đồng thời bằng 0 nên phương trình $ax + by + c = 0$ luôn có nghiệm, chẳng hạn $x = -\frac{c}{a}$, $y = 0$ nếu $a \neq 0$ ; $x = 0$, $y = -\frac{c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Lấy $(x_0\ ;\ y_0)$ là một nghiệm, nghĩa là $ax_0 + by_0 + c = 0$. Khi đó phương trình $ax + by + c = 0$ tương đương với $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Đây chính là điều kiện cần và đủ để điểm $N(x\ ;\ y)$ nằm trên đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(x_0\ ;\ y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}\,(a\ ;\ b)$.

**2.** Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát của đường thẳng thể hiện mối quan hệ của đường thẳng với hệ trục toạ độ : song song hay vuông góc với một trục, đi qua gốc toạ độ, cắt hai trục ở hai điểm phân biệt.

**3.** SGK cũng nêu một chú ý về phương trình đường thẳng theo hệ số góc : $y = kx + b$. Dạng phương trình này được dùng nhiều trong đại số và giải tích. Ý nghĩa hình học của hệ số $k$ trong phương trình đường thẳng $\Delta : y = kx + b$ là : Nếu $\Delta$ cắt trục $Ox$ ở điểm $M$ ($\Delta$ không vuông góc với trục $Ox$) thì góc $\alpha$ giữa tia $Mx$ và nửa đường thẳng $Mt$ của $\Delta$ nằm phía trên trục $Ox$ thoả mãn $\tan\alpha = k$ (h. 33).




*Hình 33*

Dạng $y = kx + b$ của đường thẳng đưa ra ở mục này xem như một trường hợp đặc biệt của dạng tổng quát. Việc giải thích ý nghĩa hình học của tên gọi "hệ số góc $k$" được thể hiện qua hai ví dụ đơn giản nêu trong $\boxed{?5}$. Có thể giới thiệu cho học sinh khá giải bài toán sau:

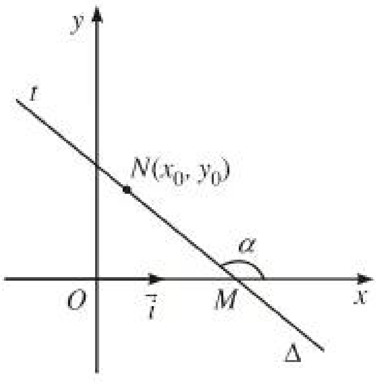
*Bài toán.* Cho đường thẳng $\Delta :\ y = kx + b$ với $k \neq 0$. Gọi $M$ là giao điểm của $\Delta$ với trục $Ox$ và $Mt$ là tia của đường thẳng $\Delta$ nằm phía trên trục $Ox$ (h. 34).

a) Xét vectơ

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{k}\,;1\right).$$

Chứng minh rằng với mọi điểm $N$ trên tia $Mt$, $N \neq M$, ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

b) Gọi $\alpha$ là góc giữa hai tia $Mx$ và $Mt$. Chứng minh rằng $\tan\alpha = k$.




*Hình 34*

*Giải :*

a) Ta tính được $M = \left(-\frac{b}{k}\,;0\right)$. Lấy $N(x_0\,;\,y_0)$ thuộc tia $Mt$ thì $y_0 > 0$ và $y_0 = kx_0 + b$. Ta có

$$\overrightarrow{MN} = \left(x_0 + \frac{b}{k}\,;\,y_0\right) = \left(\frac{kx_0 + b}{k}\,;\,y_0\right) = \left(\frac{y_0}{k}\,;\,y_0\right) = y_0\,\vec{u}$$

với $y_0 > 0$, suy ra vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

b) $\cos\alpha = \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \dfrac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}} = \dfrac{|k|}{k\sqrt{k^2+1}}$ và $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{1}{k^2+1}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$.

Do đó $\tan\alpha = k$.

Sở dĩ SGK phải giới thiệu cho học sinh biết dạng phương trình đường thẳng theo hệ số góc vì hai lí do sau :

– Một là giúp cho học sinh thấy được mối liên hệ giữa Hình học với Đại số (hàm số bậc nhất). Sau này trong môn Giải tích, khái niệm đạo hàm của hàm số liên quan mật thiết đến hệ số góc của đường thẳng.

– Hai là khi tìm phương trình tổng quát của đường thẳng, học sinh thường phải giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số ẩn lớn hơn số phương trình, các em sẽ lúng túng nên thường giả thiết đường thẳng có phương trình $y = kx + b$. Tất nhiên lời giải bài toán nói chung sẽ không đầy đủ. Cần phải xét thêm trường hợp đường thẳng vuông góc với $Ox$ (không có hệ số góc).

**4.** Một điểm cần lưu ý trong §1 là : Vị trí tương đối của hai đường thẳng được xác định qua việc tính các định thức cấp hai. Tuy nhiên có thể nhận biết một cách nhanh chóng vị trí tương đối đó qua tỉ số của các hệ số $a$, $b$, $c$ và $a'$, $b'$, $c'$ trong trường hợp $a$, $b$, $c$ hoặc $a'$, $b'$, $c'$ đều khác 0.

Trường hợp $a = 0$ thì hai đường thẳng cùng phương (song song hoặc trùng nhau) khi và chỉ khi $a' = 0$.

Tương tự đối với các hệ số $b$ và $b'$.

## III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Mỗi đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, các vectơ này đều khác $\vec{0}$ và cùng phương.

$\boxed{?2}$ Có duy nhất một đường thẳng đi qua $I$ và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

$\boxed{?3}$ $7x - 5 = 0$ là phương trình tổng quát của đường thẳng, có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1}(7 ; 0)$.

$mx + (m + 1)y - 3 = 0$ là phương trình tổng quát của đường thẳng, có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2}(m ; m + 1)$. (*Chú ý :* $\vec{n_2} \neq \vec{0}$ với mọi $m$).

$kx - \sqrt{2}ky + 1 = 0$ là phương trình tổng quát của đường thẳng khi và chỉ khi $k \neq 0$. Lúc đó, nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_3}(1 ; -\sqrt{2})$.

**1**

a) Đường thẳng $\Delta$ nhận vectơ $\vec{n} = (3 ; -2)$ là một vectơ pháp tuyến.

b) Thay toạ độ của điểm $M$ vào vế trái phương trình của $\Delta$, ta được

$$3.1 - 2.1 + 1 \neq 0. \text{ Suy ra } M \notin \Delta.$$

Đối với $N$ ta có $3.(-1) - 2.(-1) + 1 = 0$, suy ra $N \in \Delta$.

Tương tự ta được : $P \in \Delta$, $Q \notin \Delta$, $E \notin \Delta$.

**2**

– Khi $a = 0$, phải có $b \neq 0$. Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0 ; b)$ cùng phương với $\vec{j}$ nên $\Delta$ vuông góc với trục $Oy$ (song song hoặc trùng với $Ox$).

– Khi $b = 0$, $\Delta$ vuông góc với trục $Ox$ (song song hoặc trùng với trục $Oy$).

– Khi $c = 0$, phương trình của $\Delta$ có dạng $ax + by = 0$, toạ độ điểm $O$ thoả mãn phương trình của $\Delta$. Vậy $\Delta$ đi qua gốc toạ độ $O$.

**3**

a) $\overrightarrow{AB} = (-a ; b)$. Lấy vectơ $\vec{n} = (b ; a)$ thì $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của $\Delta$. Vậy $\Delta$ có phương trình tổng quát là

$$b(x - a) + a(y - 0) = 0 \quad \text{hay} \quad bx + ay - ab = 0.$$

b) $bx + ay - ab = 0 \Leftrightarrow bx + ay = ab$

$$\Leftrightarrow \frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1 \text{ (do } ab \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$\boxed{?4}$ Phương trình của đường thẳng $AB$ theo đoạn chắn là $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$. Dạng tổng quát là $2x - y + 2 = 0$.

*Lưu ý*. Bài toán tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm bất kì chưa nên đề cập đến ở đây. Nó sẽ được nói đến trong §2.

$\boxed{?5}$ Giúp học sinh bước đầu thừa nhận khái niệm "hệ số góc của đường thẳng" và ý nghĩa hình học của nó.

a) $\Delta_1$ có hệ số góc $k = -1$, $\alpha = 135^{\circ}$.

b) $\Delta_2$ có hệ số góc $k = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^{\circ}$.

$\boxed{?6}$ $\Delta_1$ song song hoặc trùng với $\Delta_2$.

$\boxed{?7}$ a) $\frac{\sqrt{2}}{1} \neq \frac{-3}{3} \Rightarrow \Delta_1$ và $\Delta_2$ cắt nhau.

b) $\frac{1}{-2} = \frac{-3}{6} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta_1$ và $\Delta_2$ song song.

c) $\frac{0,7}{1,4} = \frac{12}{24} = \frac{-5}{-10} \Rightarrow \Delta_1$ và $\Delta_2$ trùng nhau.

## IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

**1.** Các mệnh đề đúng là : a), b), c).

Các mệnh đề sai là : d), e).

**2.** a) $y = 0$, do $Ox$ qua $O(0 ; 0)$ và vuông góc với $\vec{j}(0 ; 1)$.

b) $x = 0$, do $Oy$ qua $O(0 ; 0)$ và vuông góc với $\vec{i}(1 ; 0)$.

c) Nhắc học sinh cảnh giác rằng : Chỉ có đường thẳng đi qua $M$ và song song với $Ox$ khi $y_0 \neq 0$, phương trình đường thẳng là $y - y_0 = 0$.

d) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $Ox$ nhận $\vec{i}(1 ; 0)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$1.(x - x_0) + 0.(y - y_0) = 0 \text{ hay } x - x_0 = 0.$$

e) Đường thẳng $OM$ đi qua $O$ nên có phương trình dạng $ax + by = 0$. Nó lại đi qua $M(x_0 ; y_0)$ nên $ax_0 + by_0 = 0$. Ta có thể lấy $a = y_0$ và $b = -x_0$ (thoả mãn $a^2 + b^2 \neq 0$). Vậy đường thẳng $OM$ có phương trình là $y_0x - x_0y = 0$.

3. Toạ độ của điểm $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{5}{3}. \end{cases} \text{ Vậy } B = \left(-2\,;-\frac{5}{3}\right).$$

Lấy hai điểm $M\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{5}\,;0\right)$ thuộc đường thẳng $AC$ thì vectơ $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{1}{5}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường cao $BB'$ của tam giác $ABC$.

Phương trình đường thẳng $BB'$ là :

$$-\frac{1}{5}(x+2) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{3}\right) = 0 \text{ hay } 2x + 5y + \frac{37}{3} = 0.$$

Giáo viên cũng có thể gợi ý cho học sinh nhận xét rằng vectơ $\vec{n} = (2\,;5)$ là một vectơ pháp tuyến của đường cao $BB'$. Từ đó áp dụng công thức (1) để viết phương trình $BB'$.

4. a) Đường thẳng $PQ$ có phương trình $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-2} = 1$ hay $x - 2y - 4 = 0$.

Đường thẳng $\Delta$ song song với $PQ$ có phương trình $x - 2y + c = 0$ với $c \neq -4$. Do $A \in \Delta$ nên $3 - 2.\,2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$. Đường thẳng cần tìm có phương trình $x - 2y + 1 = 0$.

b) Đường trung trực của đoạn $PQ$ đi qua trung điểm $J$ của $PQ$ và vuông góc với $\overrightarrow{PQ}$. Dễ dàng tính được $J = (2\,;-1)$ và $\overrightarrow{PQ} = (-4\,;-2)$. Phương trình đường trung trực của đoạn $PQ$ là $2x + y - 3 = 0$.

5. a) *Cách 1*. Để ý rằng $M \notin d$ nên đường thẳng $d'$ đối xứng với $d$ qua $M$ sẽ song song với $d$. Lấy điểm $A \in d$ và gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $M$ thì $A' \in d'$. Bài toán đưa về viết phương trình đường thẳng qua $A'$ và song song với $d$. Cụ thể là :

Lấy $A(1\,;1) \in d$, $A'(x'\,;y')$ đối xứng với $A$ qua $M$ thì $\begin{cases} x' + 1 = 4 \\ y' + 1 = 2. \end{cases}$

Suy ra $A' = (3\,;1)$.

Phương trình đường thẳng $d'$ có dạng :

$$1(x-3) - 1(y-1) = 0 \text{ hay } x - y - 2 = 0.$$

*Cách 2*. Xét tập hợp các điểm $A'$ đối xứng với $A$ qua $M$. Đặt $A = (x_0\,;y_0)$ và $A' = (x\,;y)$ là điểm đối xứng với $A$ qua $M$.

Ta có : $\begin{cases} x + x_0 = 4 \\ y + y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 - x \\ y_0 = 2 - y. \end{cases}$

Do $A \in d$ nên $x_0 - y_0 = 0$. Vậy $(4 - x) - (2 - y) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$. Đây chính là phương trình của $d'$.

b) Xét đường thẳng $\Delta$ có phương trình : $x + y + m = 0$. Dễ thấy $\Delta \perp d$. $M \in \Delta \Leftrightarrow 2 + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -3$. Vậy phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ và vuông góc với $d$ là $x + y - 3 = 0$. Gọi $M'$ là hình chiếu của $M$ trên $d$. Toạ độ của $M'$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy $M' = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$.

**6.** a) Hai đường thẳng cắt nhau ở điểm $\left(\dfrac{9}{29} ;\ \dfrac{21}{29}\right)$.

b) Hai đường thẳng song song.

c) Hai đường thẳng trùng nhau.